АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«КОЛЛЕДЖ МИРОВОЙ ЭКОНОМИКИ И ПЕРЕДОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

учебной дисциплины ОУД.07 Математика

по специальности
46.02.01 Документационное обеспечение управления и архивоведение

квалификация – специалист по документационному обеспечению управления и архивному делу

форма обучения – очная

Москва – 2025

ОДОБРЕНА

Предметной (цикловой) комиссией
математических дисциплин
Протокол от 31 августа 2025 г.№ 1

Разработана на основе Федерального государственного образовательного стандарта по специальности среднего профессионального образования 46.02.01 Документационное обеспечение управления и архивоведение

Председатель ПЦК

/Космакова О.В.

Заместитель директора по методической работе

/ Ю.И. Богомолова

РАССМОТРЕНА
на заседании Педагогического совета
Протокол от 31 августа 2025 г. №1

Разработчик:
Космакова О.В., преподаватель АНО ПО «Колледж мировой экономики и передовых технологий»

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЪIХ СРЕДСТВ
по общеобразовательной учебной дисциплине ОУД.07 Математика

Перечень требований к результатам освоения дисциплины

Наименование требования к результатам освоения дисциплины	**Оценочные средства**
Личностные образовательные результаты	
– сформированность представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, идеях и методах математики; – понимание значимости математики для научно-технического прогресса, сформированность отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей; – развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования; – овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественно-научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки; – готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности; – готовность и способность к самостоятельной творческой и ответственной деятельности; – готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности; – отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;	индивидуальный и / или групповой устный опрос; оценка письменных работ; тестирование; практические занятия (по темам);
Метапредметные образовательные результаты	
– умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях; – умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты; – владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;	индивидуальный и / или групповой устный опрос оценка письменных работ; тестирование; практические занятия (по темам)

– готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников; – владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства; – владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения; – целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира;	
Предметные образовательные результаты	
– сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке; – сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий; – владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; – владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств; – сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей; – владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием; – сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин; – владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.	индивидуальный и / или групповой устный опрос оценка письменных работ; тестирование; практические занятия (по темам).
Форма промежуточной аттестации: экзамен во 2 семестре	

1.1. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов освоения дисциплины

Оценочные средства представляют собой тестовые вопросы и задания для проведения текущего контроля по общеобразовательной учебной дисциплине ОУД.07 МАТЕМАТИКА и ориентированы на проверку качества знаний обучающихся.

Содержание банка отражает содержание рабочей программы общеобразовательной учебной дисциплины ОУД.07 МАТЕМАТИКА и включает следующие виды контроля знаний:

- опрос (устный, письменный),
- расчетно-графическая работа,
- тестирование (по разделу),
- индивидуальное задание.
- проверка самостоятельной работы (СР).
- практическая работа.

Наименование разделов и тем	Наименование контрольно-оценочного средства	
Введение	устное выступление (сообщение)	тестирование
Тема 1. Развитие понятия о числе	устное выступление (сообщение)	тестирование, проверка СР
Тема 2. Корни, степени и логарифмы	отчёт по практическому заданию	тестирование, проверка СР
Тема 3. Прямые и плоскости в пространстве	отчёт по практическому заданию	проверка СР
Тема 4. Комбинаторика	отчёт по практическому заданию	проверка СР
Тема 5. Координаты и векторы	отчёт по практическому заданию	проверка СР
Тема 6. Основы тригонометрии		
Тема 6.1. Основные понятия тригонометрии	отчёт по практическому заданию	проверка СР
Тема 6.2. Основные тригонометрические тождества	отчёт по практическому заданию	проверка СР
Тема 6.3. Преобразование простейших тригонометрических выражений	отчёт по практическому заданию	проверка СР
Тема 6.4. Тригонометрические уравнения и неравенства	отчёт по практическому заданию	проверка СР
Тема 7. Функции и графики	отчёт по практическому заданию	расчетно-графическая работа
Тема 8. Многогранники и круглые тела		
Тема 8.1. Многогранники	отчёт по практическому заданию	проверка СР
Тема 8.2. Тела и поверхности вращения	отчёт по практическому заданию	проверка СР
Тема 8.3. Измерения в геометрии	отчёт по практическому	проверка СР

Наименование разделов и тем	Наименование контрольно-оценочного средства	
	заданию	
Тема 9. Начала математического анализа. Интеграл и его применение.	отчёт по практическому заданию	проверка СР
Тема 10. Элементы теории вероятностей и математической статистики	отчёт по практическому заданию	проверка СР
Тема 11. Уравнения и неравенства	отчёт по практическому заданию	проверка СР

2. КОМПЛЕКТ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для текущего контроля успеваемости по общеобразовательной учебной дисциплине ОУД.07 Математика

2.1 Пояснительная записка

Комплект оценочных средств предназначен для мониторинга качества получаемых обучающимися образовательных результатов, знаний, умений по наиболее значимым для дальнейшего обучения темам, разделам учебной общеобразовательной учебной дисциплине ОУД.07 Математика и входит в состав фонда оценочных средств программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 46.02.01 Документационное обеспечение управления и архивоведение, реализуемой в АНО ПО «Колледж мировой экономики и передовых технологий».

Комплект оценочных средств разработан в соответствии с рабочей программой ОУД.07 Математика.

Комплект оценочные средства для проведения текущего контроля успеваемости включает:

- контрольную работу, позволяющую оценить применение полученных теоретических знаний в практической ситуации;
- тесты, позволяющие провести процедуру измерения уровня знаний и умений обучающихся;
- опрос (устный, письменный), позволяющий оценить объем и глубину знаний по теме;
- расчетно-графическая работа, позволяющая оценить умение применять полученные знания по заранее определенной методике для решения задач по дисциплине в целом;
- проверка самостоятельной работы, позволяющая оценить исполнительские навыки обучающихся в решении поставленных задач.

2.2 Оценочные средства для проведения тестирования

Критерии оценивания

81-100 % верно выполненных заданий – «5»
67-80 % верно выполненных заданий – «4»
51-66 % верно выполненных заданий – «3»
50 % и менее верно выполненных заданий – «2»

Введение

ТЕСТ

1. Математика является для многих отраслей знаний не только орудиемколичественно расчёта, но также

A. методом измерения результатов и средством оценки гипотез;
B. методом воспитания и средством обучения;
C. методом оценки и средством контроля полученных результатов;
D. методом точного исследования и средством четкой формулировки понятий.

2. Новые теории в математике возникают в ответ на

E. запросы интенсивного развития и необходимость обоснования значимости предмета производства;
F. запросы практики и внутреннего развития самой математики;
G. запросы банков данных и информационного развития общества:
H. запросы пользователей и интеграции социальной сферы

3. Математика в современном мире применяется для:

I. исследования всего в мире математически;
J. развития математического аппарата, научных расчетов;
K. обеспечения гуманитарных наук формальными формами языка;
L. майнинга криптовалюты.

4. Математика – это:

M. наука о числовых и буквенных величинах и действиях с ними;
N. наука о геометрических образах и действиях с ними;
O. формальный язык цифр, символов, операций, геометрических образов, структур, соотношений;
P. наука о количественных отношениях и пространственных формах.

5. Главная роль и значение математики в современном мире, в основном, состоит в том, что математика:

Q. помогает прокладывать, усиливать и использовать междисциплинарные связи;
R. изучает системы окружающей действительности с позиции точных наук;
S. помогает изучать системы в гуманитарных науках;
T. изучает гипотетические направления.

6. Отличительной особенностью математики является, в основном, то, что она в различных системах (как реальных, так и идеальных) выявляет, описывает и изучает:

U. абстрактное
V. инвариантное
W. приложения
X. полезное

7. Мировоззренческая роль математики в обществе, познании и природе состоит, в основном, в том, что она позволяет:

A. смотреть на мир с позиции представления его объектов и процессов числами и буквами;
B. выявлять, описывать, исследовать внешние и внутренние связи систем;
C. исследовать все то, что нужно практически человеку в мире;
D. измерять все в мире числами.

8. Задача линейного программирования относится к

Y. математике;
Z. программированию;
AA. прогнозированию;
BB. системному администрированию.

9. Задачи Пола Эрдеша до сих пор решают потому, что

CC. их никто не смог решить;
DD. их решить невозможно;
EE. они красивые;
FF. автор еще не сформулировал их до конца.

10. Высказывание «Дай ему монету — он ищет выгоду, а не знаний!»принадлежит

GG. Архимеду;
HH. Аристотелю;
II. Евклиду;
JJ. Пифагору.

11. Культурная роль математики состоит в том, что она:

KK. повышает вычислительные способности человека;
LL. содействует профессиональному росту человека;
MM. содействует спортивным успехам человека;
NN. приводит к эстетическому превосходству.

12. Эстетическая роль математики состоит, в основном, в том, что онаизучает:

OO. симметрию и гармонию в математических доказательствах;
PP. орфографию и пунктуацию в математических формулах;
QQ. синтаксис и пунктуацию в математических формулах.
RR. форму и пропорции, симметрию и гармонию в системе (системах);

13. Основные цели обучения математике (в широком смысле):

SS. овладение учащимися элементами мышления, которые наиболее ярко проявляются в математической деятельности и которые необходимы каждому для полноценного развития в современном обществе;
TT. овладение учащимися системой математических знаний, умений и навыков, дающей представление о предмете математики, о математических приемах и методах познания, применяемых в математике;
UU. создание условий для зарождения интереса к математике и развития математических способностей одаренных обучаемых;
VV. формирование мировоззрения у обучаемых, логической и эвристической составляющих мышления, алгоритмического мышления; пространственного воображения.

14. Воспитательные цели обучения математике (в узком смысле):

WW. воспитание активности, самостоятельности, ответственности, нравственности, культуры общения; эстетической культуры, графической культуры;
XX. овладение учащимися элементами мышления, которые наиболее ярко проявляются в математической деятельности и которые необходимы каждому для полноценного развития в современном обществе;
YY. овладение учащимися системой математических знаний, умений и навыков, дающей представление о предмете математики, о математических приемах и методах познания, применяемых в математике;
ZZ. создание условий для зарождения интереса к математике и развития математических способностей одаренных обучаемых.

15. Развивающие цели обучения математике (в узком смысле):

AAA. овладение учащимися системой математических знаний, умений и навыков, дающей представление о предмете математики, о математических приемах и методах познания, применяемых в математике;
BBB. воспитание активности, самостоятельности, ответственности, нравственности, культуры общения; эстетической культуры, графической культуры;
CCC. овладение учащимися элементами мышления, которые наиболее ярко проявляются в математической деятельности и которые необходимы каждому для полноценного развития в современном обществе;
DDD. формирование мировоззрения у обучаемых, логической и эвристической составляющих мышления, алгоритмического мышления; пространственного воображения.

Ключ к тесту по теме «Введение»

Вопрос	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Ответ	D	B	B	C	A	B	B	A	C	C	B	D	D	A	C

Тема 1. Развитие понятия о числе

ТЕСТ

1. На первых ступенях развития понятие числа определялось потребностями

A. счета;
B. измерения;
C. счёта и измерения;
D. любознательностью человека.

2. Системой счисления в древнем мире пользовались

A. Аристократы народов-завоевателей;
B. Народы, обладавшие письменностью;
C. Народы, занимающиеся земледелием и скотоводством;
D. Все народы.

3. Понятия числа зависит от

A. Количества;
B. Качества;
C. Количества и качества;
D. Количества, качества и содержания.

4. Наука о числах называется

A. Алгебра;

B. Кибернетика;
C. Информатика;
D. Арифметика.

5. Какое высказывание является верным (□ - включает)

A. $R \subset Z \subset Q \subset N$;
B. $R \subset Q \subset N \subset Z$;
C. $R \subset Q \subset Z \subset N$;
D. $N \subset Z \subset Q \subset R$.

6. В десятичной записи рационального числа первый знак перед запятой

A. является минус первым разрядом;
B. является нулевым разрядом;
C. является первым разрядом;
D. не нумеруется.

7. Приближенные значения появляются при

A. округлении чисел;
B. округлении чисел и статистических опросах;
C. округлении чисел и измерениях:
D. округлении чисел и рутинных вычислениях;

8. Абсолютная (АП) и относительная (ОП) погрешность выражаются в

A. АП в криптовалюте, ОП в процентах;
B. АП в процентах, ОП в мегагерцах;
C. АП в процентах, ОП в физических единицах измерения;
D. АП в физических единицах измерения, ОП в процентах;

9. Амперметр, имеющий класс точности 1,0 и предел измерения 5 А, измерит ток 3,5 А с относительной погрешностью не более %.

A. не более 0,14 А;
B. не более 0,14 %;
C. не более 1,4 %;
D. не более 14 %;

10. Определить абсолютную (АП) и относительную (ОП) погрешность для числа 99.95, полагая, что все цифры верные.

A. АП не более 0,001, ОП не более 0,00001
B. АП не более 0,01, ОП не более 0,0001
C. АП не более 0,1, ОП не более 0,001
D. АП не более 1,0, ОП не более 0,01

11. Комплексное число состоит из

A. действительной и софистической частей;
B. действительной и мнимой частей;
C. софистической и мнимой частей;
D. софистической и воображаемой частей.

12. Комплексное число можно изобразить на

A. числовой оси;
B. комплексной плоскости;
C. числовой сфере;
D. комплексной пирамиде;

13. При сравнении двух комплексных чисел можно определить, что

A. они равны;
B. одно число больше или меньше другого;
C. одно число больше или меньше другого или они равны;
D. комплексные числа нельзя сравнить.

14. Мнимая единица, возведенная в степень, может принимать значения

A. -1; 1;
B. i; - i;
C. -1; 1; i; - i;
D. любые.

15. Для того, чтобы разделить комплексное число на другое комплексное число необходимо

A. возвести числа в чётную степень
B. возвести числа в нечётную степень
C. помножить числитель и знаменатель, на число сопряженное числителю.
D. помножить числитель и знаменатель, на число сопряженное знаменателю.

Ключ к тесту по теме «Развитие понятия о числе»

Вопрос	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ответ	C	B	A	D	C	B	C	D	C	A	B	B	A	C	D

Тема 2. Корни, степени и логарифмы

1. Число $1111^{00,7777}$ ***можно записать как***

A. $\sqrt[0,75]{16}$;
B. $16^{\frac{3}{4}}$;
C. $\sqrt[3]{16^4}$;
D. $\sqrt[1,5]{16^{2}}$.

2. Значение выражения $88^{33} \cdot 88^{\frac{11}{33}} - 1\overline{1}11 : 1111^{44} + \overline{\ }?9^{77}?$ $\frac{11}{}$ $\frac{77}{22}$

A. 5;
B. 8;
C. 9;
D. 16.

3. Найдите значение выражения \⁺ o /

A. 20;
B. 40;
C. 60;
D. 80.

3. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-4} = 3.$

A. 12;
B. 13;
C. 31;
D. 32.

4. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-8} = 2^x.$

A. 1;
B. 2;
C. 3;
D. 4.

5. Логарифмом числа b по основанию a называется

A. показатель степени, равный квадратному корню из остатка от деления a на b;
B. показатель степени, равный остатку от деления a на b;
C. показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b;
D. показатель степени, в которую надо возвести b, чтобы получить a.

6. Основное логарифмическое тождество

A. $b^{\log_a b} = a$;
B. $a^{\log_a b} = b$
C. $a^{\log_b a} = b$
D. $b^{\log_b a} = a$

3. Логарифм $\mathbf{llllll}_{aa}\, \boldsymbol{xxxx}$ ***можно представить как***

A. $\log_X a + \log_y b$;
B. $\log_a x - \log_a y$;
C. $\log_a x * \log_a y$;
D. $\log_a x + \log_a y$.

4. Логарифм $\mathbf{llllll}_{aa}\, \boldsymbol{xx/xx}$ ***можно представить как***

A. $\log_X a + \log_y b$;
B. $\log_a x - \log_a y$;
C. $\log_a x * \log_a y$;
D. $\log_a x + \log_a y$.

5. Логарифм $\mathbf{llllll}_{aa}\, \boldsymbol{xx^{pp}}$ ***можно представить как***

E. $(\mathrm{loga}\ x)p$;
F. $p\ \mathrm{loga}\ x$;
G. $x\ \mathrm{logp}\ a$;
H. $a\ \mathrm{logp}\ x$.

6. Выражение $\sqrt{-4\quad 5x} - 4.$ называется

A. рациональным;
B. иррациональным;
C. логарифмическим;
D. показательным.

7. Выражение $x = \frac{6x-15}{x-2}$. называется

A. рациональным;
B. иррациональным;
C. логарифмическим;
D. показательным.

8. Выражение $9^{-5+x} = 729$. называется

A. рациональным;
B. иррациональным;
C. логарифмическим;
D. показательным.

9. Выражение $\log_2(4-x) = 7$. называется

A. рациональным;
B. иррациональным;
C. логарифмическим;
D. показательным.

10. Для того чтобы умножить многочлен на многочлен

A. нужно первый член первого множителя умножить на второй член второго множителя, и сложить получившиеся результаты;
B. нужно первый член второго множителя умножить на второй член первого множителя, и сложить получившиеся результаты;
C. нужно каждый член первого множителя умножить на второй множитель, и сложить получившиеся результаты;
D. нужно сложить члены первого и второго множителей.

Ключ к тесту по теме «Корни, степени и логарифмы»

Вопрос	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ответ	B	A	D	C	D	C	B	D	B	B	B	A	D	C	C

2.3 Оценочные средства для проведения опроса (устного/письменного)

Критерии оценивания

Оценка «***отлично***» ставится, если:

- студент полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий;
- обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно составленные;
- излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

Оценка «***хорошо***» – студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для отметки «отлично», но допускает 1–2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1–2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

Оценка «***удовлетворительно***»

- студент обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но:
- излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

Оценка «***неудовлетворительно***» ставится, если студент обнаруживает незнание большей части соответствующего вопроса, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал. Оценка «неудовлетворительно» отмечает такие недостатки в подготовке, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

Тема 2. Корни, степени и логарифмы

- Дайте определение степени

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ раз},\ a \neq 0; \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

где m – целое число, а n – натуральное.

- Назовите свойства степени

1) $a^0=1$;

2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;

3) $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$;

5) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$;

6) $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$;

7) $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha\cdot\beta}$.

- Дайте определение корня

  $\sqrt[n]{a}=x \Leftrightarrow x^{n}=a$
- Назовите свойства корней

  1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;
  2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
  3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}=\sqrt[n]{a^{m}}$;
  4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$, где m, n – натуральные числа.
  5) $\sqrt[2n]{a^{2n}}=\begin{cases} a, & \text{если } a\geq 0, \\ -a, & \text{если } a<0 \end{cases}$.
- Формулы сокращённого умножения:

  1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
  2) $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$;
  3) $a^2 – b^2 = (a + b) \cdot (a – b)$;
  4) $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 – ab + b^2)$;
  5) $a^3 – b^3 = (a – b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$;
  6) $(a + b)^3 = a^3 + 3a2b + 3ab^2 + b^3$;
  7) $(a – b)^3 = a^3 – 3a2b + 3ab^2 – b^3$.
- Дайте определение логарифма:

  $\log_a b=x \Leftrightarrow a^x=b,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0.$
- Основное логарифмическое тождество

  $a^{\log_a b}=b$.
- Десятичный логарифм (по основанию 10):

  $\lg b: 10^{\lg b}=b.$
- Натуральный логарифм (по основанию e):

  $\ln b: e^{\ln b}=b$.
- Свойства логарифмов:

  1) loga1=0;
  2) logaa=1 ;
  3) loga(x·y)=logax+logay;
  4) loga$\frac{x}{y}$=;logax-logay ;
  5) logaxp= p·logax;
  6) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ – переход к новому основанию;
  7) $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\cdot\log_a b$.

Тема 3. Прямые и плоскости в пространстве

- Какие прямые называются параллельными?
- Какие плоскости называются параллельными?
- Сформулируйте признак скрещивающихся прямых
- Как могут располагаться прямые и плоскости в пространстве?
- Назовите свойства параллельных плоскостей.
- Дайте определение углу между прямой и плоскостью
- Дайте определение углу между скрещивающимися прямыми

- Сформулируйте определение прямой, параллельной плоскости
- Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости
- Сформулируйте признак параллельности плоскостей
- Сформулируйте важное следствие о двух пересекающихся плоскостях, одна из которых содержит прямую, параллельную другой плоскости.
- Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах
- Запишите каноническое уравнение прямой в пространстве
- Запишите параметрическое уравнение прямой в пространстве
- Запишите уравнение прямой в пространстве, проходящей через три точки
- Перечислите случаи взаимного расположения прямых в пространстве
- Сформулируйте определение угла между двумя пересекающимися прямыми
- Какой угол называется углом между скрещивающимися прямыми?

Тема 4. Комбинаторика

- Сформулируйте понятие науки «Комбинаторика».
- Что такое факториал числа?
- Сформулируйте правило суммы в комбинаторике.
- Сформулируйте правило произведения в комбинаторике.
- Что называется перестановкой из n элементов?
- Запишите формулу для вычисления числа перестановок без повторений.
- Запишите формулу для вычисления числа перестановок с повторениями.
- Что называется размещением из n элементов по k?
- Запишите формулу для вычисления числа размещений без повторений.
- Запишите формулу для вычисления числа размещений с повторениями.
- Что называется сочетанием из n элементов по k?
- Запишите формулу для вычисления числа сочетаний без повторений.
- Запишите формулу для вычисления числа сочетаний с повторениями.

Тема 5. Координаты и векторы

- Как называется единичный вектор?
- Какие координаты имеют орты i, j, k?
- Где располагается точка T(m;0;0)?
- Где располагается точка F(m;n;0)?
- Где располагается точка R(0;n;0)?
- Где располагается точка U(0;n;k)?
- Как называется направленный отрезок?
- Как называется вектор (КК)?
- Какие векторы называются компланарными?
- Какие векторы называются коллинеарными?
- Как найти координаты вектора по координатам его начала и конца?
- Как найти длину вектора, если известны его координаты?
- Как найти координаты вектора суммы и вектора разности двух векторов?
- Как найти координаты середины отрезка?
- Как находить угол между векторами?

- Какие координаты имеют противоположные векторы?
- Что происходит с координатами вектора при умножении вектора на число?
- Какие операции над векторами относятся к линейным? к нелинейным?
- Что называется скалярным произведением двух векторов? Каковы его основные свойства?
- Что называется векторным произведением двух векторов? Каковы его основные свойства?
- Что называется смешанным произведением трех векторов? Каковы его основные свойства?
- В чем состоит геометрический и физический смысл скалярного, векторного, смешанного произведения векторов? Каковы их приложения?
- Какие векторы называются линейно зависимыми и линейно независимыми?
- Как найти координаты вектора в базисе других векторов?
- Что называется размерностью линейного пространства? Как найти координаты произвольного вектора в этом пространстве?

Тема 6. Основы тригонометрии

- Дайте определение тригонометрических функций для угла прямоугольного треугольника
- Назовите значения тригонометрических функций 30, 45 и 60 градусов
- Определение тригонометрических функций на единичной окружности
- Формулы тождественных преобразований

1. Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

2. Формулы двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

3. Формулы половинного аргумента

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2\alpha)};\ \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(1+\cos 2\alpha)};\ tg\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}.$$

4. Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

5. Формулы преобразования суммы в произведения

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

6. Формулы преобразования произведений в суммы

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

7. Определения обратных тригонометрических функций

$\sin x = a$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ $\Leftrightarrow$ $x = \arcsin a$; $\arcsin(-a) = -\arcsin a$;

$\cos x = a$, $x \in [0;\pi]$ $\Leftrightarrow$ $x = \arccos a$; $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$;

$\operatorname{tg} x = a$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $\Leftrightarrow$ $x = \operatorname{arctg} a$; $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$;

$\operatorname{ctg} x = a$, $x \in (0;\pi)$ $\Leftrightarrow$ $x = \operatorname{arcctg} a$; $\operatorname{arcctg}(-a) = -\operatorname{arcctg} a$.

8. Тригонометрические уравнения

$\sin x = a$, $a \in [-1;1]$. **Решение**: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$;

$\cos x = a$, $a \in [-1;1]$. **Решение**: $x = \pm\arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$;

$\operatorname{tg} x = a$, $a \in R$. **Решение**: $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in Z$;

$\operatorname{ctg} x = a$, $a \in R$. **Решение**: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in Z$.

Тема 8. Многогранники и круглые тела

- Дайте определение: прямая призма
- Дайте определение: правильная призма
- Дайте определение: параллелепипед
- Дайте определение: прямоугольный параллелепипед
- Дайте определение: куб
- Дайте определение: пирамида
- Дайте определение: правильная пирамида
- Дайте определение: тетраэдр
- Дайте определение: усеченная пирамида
- Дайте определение: цилиндр
- Дайте определение: конус
- Дайте определение: усеченный конус
- Дайте определение: сфера и шар
- Объем наклонной призмы: V=Sосн·H , где Sосн – площадь основания призмы.
- Площадь поверхности: S=2Sосн+Sбок, где Sбок – площадь боковой поверхности, равная сумме площадей всех граней.

- Площадь боковой поверхности прямой призмы: Sбок=P·l, где P – периметр основания.
- Свойства диагоналей параллелепипеда: AC1=BD1=CA1=DB1=d; d2=a2+b2+c2.
- Объем параллелепипеда: V=abc.
- Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$.
- Площадь поверхности пирамиды: $S_{бок} = \frac{1}{2} Ph = \frac{1}{2} nah$.
- Площадь боковой поверхности правильной пирамиды: $S_{бок} = \frac{1}{2} Ph = \frac{1}{2} nah$, где P – периметр основания.
- Объем усеченной пирамиды: $V = \frac{H}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$, где S1 и S2 – площади оснований.
- Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды: S=S1+S2+Sбок .
- Объем цилиндра: $V = \pi R^2 H$.
- Площадь боковой поверхности цилиндра: $S_{бок} = 2\pi RH$
- Площадь поверхности цилиндра: $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$.
- Объем конуса: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.
- Площадь боковой поверхности конуса: $S_{бок} = \pi RL$.
- Площадь поверхности конуса: $S = \pi R^2 + \pi RL$
- Объем усеченного конуса: $V = \frac{1}{3} \pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$
- Площадь боковой поверхности усеченного конуса: $S_{бок} = \pi(R + r)l$
- Площадь поверхности усеченного конуса: $S = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi(R + r)l$
- Объем шара: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.
- Площадь сферы: $S = 4\pi R^2$.
- Объем шарового сегмента: $V_1 = \frac{1}{3} \pi H^2 (3R - H)$.
- Площадь сферического сегмента: $S = 2\pi RH$.
- Объем шарового сектора: $V_2 = \frac{2}{3} \pi R^2 H$.
- Площадь боковой поверхности сектора: $S_{бок} = \pi R \sqrt{2RH - H^2}$.

Тема 9. Начала математического анализа. Интеграл и его применение.

1. Назовите способы задания числовой последовательности
2. Назовите свойства последовательностей
3. Какая последовательность называется ограниченной?
4. Какая последовательность называется ограниченной?
5. Что называется пределом последовательности?
6. Как называется последовательность, имеющая предел?

7. Как называется последовательность, не имеющая предела?
8. Основные теоремы о пределах: Предел постоянной величины
9. Основные теоремы о пределах: Предел суммы (разности) двух сходящихся последовательностей
10. Основные теоремы о пределах: Предел произведения двух сходящихся последовательностей
11. Основные теоремы о пределах: Предел частного двух сходящихся последовательностей
12. Дайте определение производной
13. В чем состоит геометрический смысл производной?
14. В чем состоит механический смысл производной?
15. Как вычислить угловой коэффициент секущей, проходящей через две точки графика некоторой функции?
16. Как найти угловой коэффициент касательной к графику функции?
17. Какая математическая формула названа именем Ньютона?
18. Когда функция называется непрерывной в точках?
19. Какую точку называют точкой разрыва функции f(x)?
20. Приведите пример, когда функция имеет устранимый разрыв.
21. Приведите пример, когда функция имеет неустранимый разрыв.
22. Дайте определение непрерывной функции в точке x0 при помощи предела функции.
23. Сформулируйте свойство непрерывной функции.
24. Как называется прямая перпендикулярная касательной и проведенная в точке касания?
25. Какая точка называется точкой перегиба?
26. Сформулируйте правила вычисления производных.
27. Чему равна производная степенной функции?
28. Чему равна производная сложной функции?
29. Какой вид имеет уравнение касательной?
30. Какие точки называются особыми точками функции?
31. Можно ли определить по графику функции дифференцируемость функции в данной точке?
32. Что такое касательная к графику дифференцируемой в точке x0 функции?
33. Для чего нужны построения касательных в отдельных точках?
34. Что называют дифференциалом функции?
35. В чем геометрический смысл дифференциала функции
36. Перечислите формулы дифференцирования.
37. Как называется операция нахождения первообразной?
38. Какое равенство должно выполняться, чтобы функция y=F(x) называлась первообразной для функции y=f(x) на промежутке X, если для x $\in$ X :
39. Может ли функция иметь несколько первообразных?
40. Напишите формулу Ньютона -Лейбница?
41. Что называется определённым интегралом?
42. Как обозначается определенный интеграл?
43. Как читается формула: $\int_a^b f(x)dx$
44. Физический смысл неопределенного интеграла
45. Какая фигура называется криволинейной трапецией?

Тема 10. Элементы теории вероятностей и математической статистики

2. Приведите классическое определение теории вероятностей.
3. Какие события называются случайными?

4. Какие бывают случайные величины?
5. Что такое совместные и несовместные события?
6. Какие события называются равновозможными?
7. Дайте классическое определение вероятности.
8. Какова вероятность противоположных событий?
9. Что такое достоверное событие?
10. Что такое произведение событий?
11. Что такое сумма событий?
12. Что такое условная вероятность?
13. Какие события являются независимыми?
14. Дайте определение непрерывной случайной величине
15. Дайте определение дискретной случайной величине.
16. Что такое закон распределения дискретной случайной величины?
17. Назовите числовые характеристики дискретной случайной величины.
18. Дайте определение генеральной совокупности.
19. Что такое совокупность?
20. Сформулируйте основную задачу математической статистики?
21. Какие бывают виды совокупностей?
22. Перечислите числовые характеристики выборки и охарактеризуйте их.
23. Что такое относительная частота выборки?
24. Перечислите и опишите способы задания выборки.
25. Что такое мода?
26. Что такое медиана?
27. Что такое математическое ожидание и каким образом оно определяется?
28. Что такое дисперсия и каким образом оно определяется?
29. Что такое среднеквадратическое отклонение и каким образом оно определяется?
30. Сформулируйте закон больших чисел.

Тема 11. Уравнения и неравенства

Назовите свойства числовых неравенств.

1. Если a > b , то b < a; наоборот, если a < b, то b > a.

2. Если a > b и b > c, то a > c. Точно так же, если a < b и b < c, то a < c.

3. Если a > b, то a + c > b+ c (и a – c > b – c).
Если же a < b, то a + c < b+ c (и a – c < b – c). Т. е. к обеим частям неравенства можно прибавлять (или из них вычесть) одну и ту же величину.

4. Если a > b и c > d, то a + c > b + d; точно так же, если a < b и c < d, то a + c < b + d, т. е. два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать.

Замечание. Два неравенства одинакового смысла нельзя почленно вычитать друг из друга, так как результат может быть верным, но может быть и неверным.

Например, если из неравенства 11 > 9 почленно вычесть неравенство 3 > 2, то получим верное неравенство 8 > 7. Если из неравенства 11 > 9 почленно вычесть неравенство 7 > 2, то полученное неравенство будет неверным.

5. Если a > b и c < d, то a – c > b – d; если a < b и c > d, то a – c < b – d, т.е. из одного неравенства можно почленно вычесть другое неравенство противоположного смысла, оставляя знак того неравенства, из которого вычиталось другое.

6. Если a > b и m – положительное число, то m a > m b и $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$, т.е. обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число (знак неравенства остаётся тем же).

Если же a > b и n – отрицательное число, то n a < n b и $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$, т.е. обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, но при этом знак неравенства нужно переменить на противоположный.

7. Если a > b и c > d , где a, b, c, d > 0, то a c > b d и если a < b и c < d, где a, b, c, d > 0, то ac < bd, т.е. неравенства одного смысла на множестве положительных чисел можно почленно перемножать.

Следствие. Если a > b, где a, b > 0, то a2 > b2, и если a < b, то a2 < b2, т.е. на множестве положительных чисел обе части неравенства можно возводить в квадрат.

8. Если a > b, где a, b > 0, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ и если a < b , то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

2.2. Оценочные средства практических заданий

Критерии оценивания

Оценка «***отлично***» ставится, если:

- студент полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий;
- обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно составленные;
- излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

Оценка «***хорошо***» – студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для отметки «отлично», но допускает 1–2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1–2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

Оценка «***удовлетворительно***»

- студент обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но:
- излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

Оценка «***неудовлетворительно***» ставится, если студент обнаруживает незнание большей части соответствующего вопроса, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал. Оценка «неудовлетворительно» отмечает такие недостатки в подготовке, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

Тема 1. Развитие понятия о числе

Пример 1. Сократить дробь $\frac{100}{250}$.

Решение:

В соответствии с основным свойством дроби $\frac{100}{250}=\frac{50\cdot 2}{50\cdot 5}=\frac{2}{5}$.

Ответ: $\frac{2}{5}$.

Пример 2. Вычислите $\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 7$.

Решение:

$$\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 7=\left(\frac{29-15}{35}\right)\cdot 7=\frac{14\cdot 7}{35}=\frac{14}{5}=2\frac{4}{5}=2{,}8.$$

Ответ: 2,8.

Пример 3. Влажность сухой цементной смеси на складе составляет 18%. Во время перевозки из-за дождей влажность смеси повысилась на 2%. Найдите массу привезенной смеси, если со склада было отправлено 400 кг.

Решение:

400 · 0,18 = 72 (кг) - масса влаги в цементе на складе;

400 – 72 = 328 (кг) - масса цемента без влаги (сухого);

$328 \cdot 100 : 80 = 410$ (кг) - масса привезённой смеси со склада.

Ответ: 410 кг.

Пример 4. Вычислите |-9,6|+|-7,4|-2.

Решение:

На основании определения модуля

|-9,6|+|-7,4|-2 = 9,6 + 7,4 – 2 = 15.

Ответ: 15.

Пример 5. Найти х, если $(-7{,}5) : \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x = 22{,}5 : (-0{,}5)$.

Решение:

$(-7{,}5) : \left(-\frac{1}{2}\right) = 7{,}5 \cdot 2 = 15$; 22,5: (– 0,5) = – 225 : 5 = – 45; 15 · х = – 45; х = – 45 : 15 = – 3.

Ответ: – 3.

Тема 2. Корни, степени и логарифмы

Базовый уровень

Пример 1. Вычислить $\frac{5 \cdot \sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{136}}$.

Решение:

$$\frac{5 \cdot \sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{136}} = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{17}{136}} = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Ответ: 2,5.

Пример 2. Вычислить $\left(\sqrt{12} + \sqrt{27}\right) \cdot \sqrt{3}$.

Решение:

$$\left(\sqrt{12} + \sqrt{27}\right) \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} + \sqrt{81} = 6 + 9 = 15$$

Ответ: 15.

Пример 3. Вычислить: $\sqrt[3]{0{,}1^3 \cdot 20^6}$.

Решение:

$$\sqrt[3]{0{,}1^3 \cdot 20^6} = \sqrt[3]{0{,}1^3} \cdot \sqrt[3]{\left(20^2\right)^3} = 0{,}1 \cdot 20^2 = 0{,}1 \cdot 400 = 40.$$

Ответ: 40.

Пример 4. Сравнить числа $\sqrt[5]{\sqrt{32}}$ и $\sqrt[6]{8}$.

Решение:

Преобразуем данные числа так, чтобы степени корня в них были равны.

$$\sqrt[5]{\sqrt{32}} = \sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt{2}\,;\ \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}.$$

Делаем вывод, что данные числа равны.

Ответ: $\sqrt[5]{\sqrt{32}} \quad = \quad \sqrt[6]{8}$.

Пример 5. Выразите величину р из равенства $(3 - p) \cdot 2 = \frac{m}{a}$.

Решение:

$$(3 - p) \cdot 2 = \frac{m}{a} \Leftrightarrow 6 - 2p = \frac{m}{a} \Leftrightarrow -2p = \frac{m}{a} - 6 \Leftrightarrow p = 3 - \frac{m}{2a}.$$

Ответ: $3-\frac{m}{2a}$.

Пример 6. Определите знак разности $2-\sqrt[6]{100}$.

Решение:

Так как $2=\sqrt[6]{2^6}=\sqrt[6]{64}$, то $\sqrt[6]{64}-\sqrt[6]{100}<0$

Ответ: Разность отрицательна.

Пример 7. Вычислить $\log_2 6-\frac{1}{2}\log_2 9$.

Решение:

$$\log_2 6-\frac{1}{2}\log_2 9=\log_2 6-\log_2 9^{\frac{1}{2}}=\log_2 6-\log_2\sqrt{9}=\log_2\frac{6}{3}=\log_2 2=1.$$

Ответ: 1.

Повышенный уровень

Пример 8. Вычислить $\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}+\sqrt[4]{4}$.

Решение:

$$\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}+\sqrt[4]{4}=\left|\sqrt{2}-2\right|+\sqrt[4]{2^2}=2-\sqrt{2}+\sqrt{2}=2.$$

Ответ: 2.

Пример 9. Вычислить $\left(8^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}+\sqrt{125^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Решение:

$$\left(8^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}+\sqrt{125^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}+\left(3^2\right)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{\left(5^3\right)^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(2^2+3^3+5\right)^{\frac{1}{2}}=\left(4+27+5\right)^{\frac{1}{2}}=36^{\frac{1}{2}}=6.$$

Ответ: 6.

Пример 10. Вычислить $\left(\frac{16}{\sqrt{5}-1}-\frac{5}{\sqrt{3}+2}-\frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+6\right)$.

Решение:

$$\left(\frac{16}{\sqrt{5}-1}-\frac{5}{\sqrt{3}+2}-\frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+6\right)=$$

$$=\left(\frac{16\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}-\frac{5\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}{\left(\sqrt{3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}-\frac{8\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+6\right)=$$

$$=\left(\frac{16\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}-\frac{5\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}{-1}-\frac{8\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+6\right)=$$

$$=\left(4\cdot\sqrt{5}+4+5\sqrt{3}-10-4\sqrt{5}-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+6\right)=\left(\sqrt{3}-6\right)\cdot\left(\sqrt{3}+6\right)=3-36=-33.$$

Ответ: – 33.

Пример 11. Вычислить $\sqrt{\left|20\cdot\sqrt{7}-53\right|}-\sqrt{\left|20\cdot\sqrt{7}+53\right|}$.

Решение:

$$\sqrt{|20\cdot\sqrt{7}-53|}-\sqrt{|20\cdot\sqrt{7}+53|}=\sqrt{(2\cdot\sqrt{7}-5)^2}-\sqrt{(2\cdot\sqrt{7}+5)^2}=$$
$$=|2\cdot\sqrt{7}-5|-|2\cdot\sqrt{7}+5|=2\cdot\sqrt{7}-5-2\cdot\sqrt{7}-5=-10.$$

Ответ: – 10.

Пример 12. Выделить полный квадрат $3y^2 + 6y - 8$.

Решение:

$3y^2 + 6y - 8 = 3(y^2 + 2y) - 8 = 3(y^2 + 2y + 1) - 3 - 8 = 3(y + 1)^2 - 11.$

Ответ: $3(y + 1)^2 - 11$.

Пример 13. Упростить $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac14}+b^{\frac14}}+\sqrt[4]{b}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac14}+b^{\frac14}}+\sqrt[4]{b}=\frac{\left(a^{\frac14}\right)^2-\left(b^{\frac14}\right)^2}{a^{\frac14}+b^{\frac14}}+\sqrt[4]{b}=$$
$$=\frac{\left(a^{\frac14}+b^{\frac14}\right)\cdot\left(a^{\frac14}-b^{\frac14}\right)}{a^{\frac14}+b^{\frac14}}+b^{\frac14}=\left(a^{\frac14}-b^{\frac14}\right)+b^{\frac14}=a^{\frac14}=\sqrt[4]{a}.$$

Ответ: $\sqrt[4]{a}$.

Пример 14. Упростить $\dfrac{x+8}{x^{\frac23}-2\sqrt[3]{x}+4}-\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x^2}+2x^{\frac13}+4}$.

Решение:

$$\frac{x+8}{x^{\frac23}-2\sqrt[3]{x}+4}-\frac{x-8}{\sqrt[3]{x^2}+2x^{\frac13}+4}=\frac{\left(x^{\frac13}\right)^3+2^3}{x^{\frac23}-2x^{\frac13}+4}-\frac{\left(x^{\frac13}\right)^3-2^3}{x^{\frac23}+2x^{\frac13}+4}=$$
$$=\frac{\left(x^{\frac13}+2\right)\cdot\left(x^{\frac23}-2x^{\frac13}+4\right)}{x^{\frac23}-2x^{\frac13}+4}-\frac{\left(x^{\frac13}-2\right)\cdot\left(x^{\frac23}+2x^{\frac13}+4\right)}{x^{\frac23}+2x^{\frac13}+4}=x^{\frac13}+2-x^{\frac13}+2=4$$

Ответ: 4.

Пример 15. Упростите выражение $\dfrac{a^2-a+1}{a^{-2}-a^{-1}+1}$ и найдите его значение при $a=\sqrt{3}$.

Решение:

$$\frac{a^2-a+1}{a^{-2}-a^{-1}+1}=\frac{a^2-a+1}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}+1}=\frac{a^2-a+1}{\frac{1-a+a^2}{a^2}}=a^2$$

При $a=\sqrt{3}$ $a^2=3$.

Ответ: a^2; 3.

Пример 16. Сократить дробь $\frac{2x^2+x-1}{1-2x-3x^2}$.

Решение:

$$\frac{2x^2+x-1}{1-2x-3x^2}=\frac{2\cdot(x+1)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}{-3\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot(x+1)}=\frac{2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}{-3\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\frac{2x-1}{1-3x}.$$

<u>*Полезно помнить*</u>, что если x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, где $a\neq 0$, то его можно разложить на множители: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

Ответ: $\frac{2x-1}{1-3x}$.

Пример 17. Упростить $2\cdot\sqrt{m^2}+\sqrt{(m-1)^2}+3m$, если m<0.

Решение:

$$2\cdot\sqrt{m^2}+\sqrt{(m-1)^2}+3m=2\cdot|m|+|m-1|+3m=-2m-m+1+3m=1.$$

Ответ: 1.

Пример 18. Вычислить $\log_{\sqrt{a}}\frac{b}{a^3}$, если $\log_b a=2$.

Решение:

$$\log_{\sqrt{a}}\frac{b}{a^3}=\frac{1}{1/2}\log_a\frac{b}{a^3}=2\left(\log_a b-\log_a a^3\right)=2\left(\frac{1}{\log_b a}-3\log_a a\right)=2\left(\frac{1}{2}-3\right)=-5$$

Ответ: – 5.

Тема 3. Прямые и плоскости в пространстве

Пример 1

Выяснить взаимное расположение прямой, заданной точкой $M_0(0;5;-1)$ и направляющим вектором $\bar{p}(3;-2;4)$, и плоскости $2x-3y-3z+12=0$.

Решение:

Определим вектор нормали плоскости: $\bar{n}(2;-3;-3)$.

Вычислим скалярное произведение вектора нормали плоскости и направляющего вектора прямой: $\bar{n}\cdot\bar{p}=2\cdot 3-3\cdot(-2)-3\cdot 4=6+6-12=0$, значит, прямая либо параллельна плоскости, либо лежит в ней.

Подставим координаты точки $M_0(0;5;-1)$ в уравнение плоскости:

$$2\cdot 0-3\cdot 5-3\cdot(-1)+12=0$$
$$0-15+3+12=0$$
$$0=0$$

Получено верное равенство, следовательно, точка M_0 лежит в данной плоскости. Разумеется, и любая точка прямой тоже будет принадлежать плоскости.

Ответ: прямая лежит в плоскости

Пример 2

Выяснить взаимное расположение плоскости $\sigma: 5x+4z-13=0$ и прямой $d:\frac{x-2}{-4}=\frac{y+5}{1}=\frac{z}{5}$.

Решение:

Найдем направляющий вектор и точку, принадлежащую прямой:

$$d:\frac{x-2}{-4}=\frac{y+5}{1}=\frac{z}{5}\quad\Rightarrow\quad \overline{p}(-4;1;5), M_0(2;-5;0)$$

Найдём вектор нормали плоскости: $\sigma: 5x+4z-13=0 \quad\Rightarrow\quad \overline{n}(5;0;4)$.

Вычислим скалярное произведение:

$$\overline{n}\cdot\overline{p}=5\cdot(-4)+0\cdot1+4\cdot5=-20+0+20=0,$$

значит, прямая параллельна плоскости или лежит в ней.

Подставим координаты точки $M_0(2;-5;0)$ в уравнение плоскости $5x+0\cdot y+4z-13=0$:

$$5\cdot2+0\cdot(-5)+4\cdot0-13=0$$
$$10+0+0-13=0$$
$$-3=0$$

Получено неверное равенство, значит, точка M_0 не лежит в плоскости σ, и все точки прямой не лежат в данной плоскости.

Ответ: $d\parallel\sigma$

Пример 3

Дана прямая $d:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$ и плоскость $\sigma: 2y-z-11=0$. Требуется:

а) доказать, что прямая пересекает плоскость;

б) найти точку пересечения прямой и плоскости;

в) через прямую d провести плоскость ϖ («омега»), перпендикулярную плоскости σ;

г) найти проекцию прямой d на плоскость σ;

д) найти угол между прямой d и плоскостью σ.

Решение:

а) Из уравнений прямой находим принадлежащую ей точку и направляющий вектор:

$$d:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}\quad\Rightarrow\quad M_0(-2;3;-1), \overline{p}(1;3;2)$$

Вектор нормали плоскости:

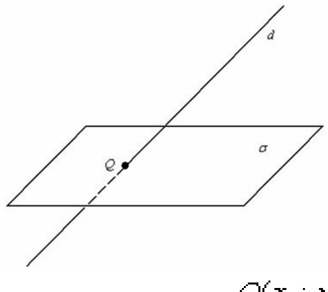
$$\sigma: 2y-z-11=0\quad\Rightarrow\quad \overline{n}(0;2;-1)$$

Вычислим **скалярное произведение**:

$$\overline{n}\cdot\overline{p}=0\cdot1+2\cdot3-1\cdot2=0+6-2=4\neq0,$$

значит, прямая пересекает плоскость, что и требовалось доказать.

б) Найдём точку пересечения плоскости и прямой: $Q(x_Q;y_Q;z_Q)=d\cap\sigma$.



Сначала перепишем уравнения прямой в параметрической форме:

$$d:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}\quad\Rightarrow\quad d:\begin{cases}x=t-2\\ y=3t+3\\ z=2t-1\end{cases}$$

Точка $Q(x_Q;y_Q;z_Q)$ принадлежит данной прямой, поэтому её координаты $x_Q;y_Q;z_Q$ при некотором значении параметра t_0 удовлетворяют параметрическим уравнениям:

$$Q:\begin{cases} x_Q = t_0 - 2 \\ y_Q = 3t_0 + 3 \\ z_Q = 2t_0 - 1 \end{cases}$$, или одной строчкой: $Q(t_0 - 2;\ 3t_0 + 3;\ 2t_0 - 1)$.

С другой стороны, точка $Q(t_0 - 2;\ 3t_0 + 3;\ 2t_0 - 1)$ принадлежит и плоскости σ, следовательно, координаты точки должны удовлетворять уравнению плоскости $0 \cdot x + 2y - z - 11 = 0$, то есть должно выполняться равенство:

$0 \cdot (t_0 - 2) + 2(3t_0 + 3) - (2t_0 - 1) - 11 = 0$ - параметрические координаты точки нужно подставить в уравнение плоскости.

Раскрываем скобки, приводим подобные слагаемые и находим «тэ нулевое»:

$$0 + 6t_0 + 6 - 2t_0 + 1 - 11 = 0$$

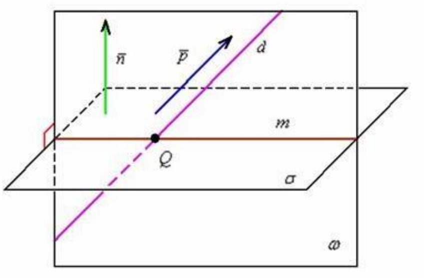
$$4t_0 - 4 = 0$$

$t_0 = 1$ – полученное значение параметра подставляем в параметрические выражения координат нашей точки:

$$Q(t_0 - 2;\ 3t_0 + 3;\ 2t_0 - 1) \quad \Rightarrow \quad Q(1 - 2;\ 3 \cdot 1 + 3;\ 2 \cdot 1 - 1) \quad \Rightarrow \quad Q(-1;\ 6;\ 1)$$

Выполнить проверку: координаты точки $Q(-1;\ 6;\ 1)$ должны «подходить» и в уравнения прямой и в уравнение плоскости.

в) Найдём уравнение плоскости ϖ, которая перпендикулярна плоскости σ и проходит через прямую d.



Уравнение плоскости ϖ можно составить **по любой** точке, которая принадлежит прямой d, направляющему вектору $\bar{p}(1;\ 3;\ 2)$ прямой d и вектору нормали $\bar{n}(0;\ 2;\ -1)$ плоскости σ.

В качестве точки, принадлежащей прямой «дэ», не возбраняется, конечно, взять найденную в предыдущем пункте точку пересечения $Q(-1;\ 6;\ 1)$, но в произвольной практической задаче она чаще всего не известна. Поэтому обычно используют точку, которую легче всего найти. В данном случае, очевидно, точку:

$$d: \frac{x + 2}{1} = \frac{y - 3}{3} = \frac{z + 1}{2} \quad \Rightarrow \quad M_0(-2;\ 3;\ -1).$$

Уравнение плоскости «омега» составим по точке $M_0(-2;\ 3;\ -1)$ и двум неколлинеарным векторам $\bar{p}(1;\ 3;\ 2), \bar{n}(0;\ 2;\ -1)$:

$$\begin{vmatrix} x - (-2) & 1 & 0 \\ y - 3 & 3 & 2 \\ z - (-1) & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x + 2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y - 3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (z + 1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-7(x + 2) + (y - 3) + 2(z + 1) = 0$$

$$7(x + 2) - (y - 3) - 2(z + 1) = 0$$

$$7x + 14 - y + 3 - 2z - 2 = 0$$

Таким образом: $\varpi: 7x - y - 2z + 15 = 0$

Проверка: находим скалярное произведение нормальных векторов $\bar{n}(0;\,2;\,-1),\ \bar{n}_{\omega}(7;\,-1;\,-2)$ двух плоскостей. Оно равно нулю, значит, плоскости перпендикулярны. На втором шаге нужно убедиться, что прямая «дэ» действительно лежит в найденной плоскости «омега». Устно подставляем координаты двух известных точек $M_0(-2;\,3;\,-1),\ Q(-1;\,6;\,1)$ в полученное уравнение плоскости $\omega: 7x-y-2z+15=0$. Обе точки «подходят», и это гарантирует, что и вся прямая d лежит в плоскости ω.

г) Найдем уравнение проекции прямой на плоскость.

По умолчанию под проекцией понимается, как правило, *ортогональная* проекция.

На чертеже наша прямая d проведена малиновым цветом, а её проекция, прямая m – коричневым цветом. Легко заметить, что проекция задаётся пересечением плоскостей: $m=\sigma\cap\omega$, и на самом деле ответ уже готов:

$$m:\begin{cases}2y-z-11=0\\7x-y-2z+15=0\end{cases}$$

Точка $Q(-1;\,6;\,1)$, принадлежащая проекции, уже известна, найдем её направляющий вектор:

$$\bar{p}_m\left(\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\B_2 & C_2\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}C_1 & A_1\\C_2 & A_2\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\A_2 & B_2\end{vmatrix}\right)$$

$$\bar{p}_m\left(\begin{vmatrix}2 & -1\\-1 & -2\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}-1 & 0\\-2 & 7\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}0 & 2\\7 & -1\end{vmatrix}\right)$$

$$\bar{p}_m(-5;\,-7;\,-14)$$

Таким образом, канонические уравнения проекции:

$$m:\frac{x+1}{-5}=\frac{y-6}{-7}=\frac{z-1}{-14}$$

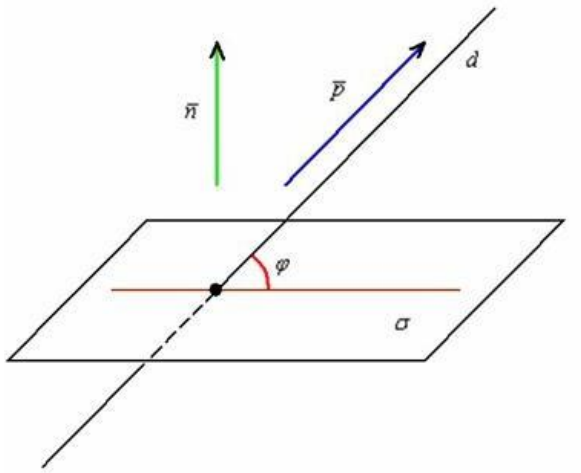
д) Найдём угол между прямой и плоскостью.

Если прямая d не перпендикулярна плоскости σ, то **углом φ между прямой и плоскостью называется __острый__ угол между прямой d и её проекцией на плоскость** σ. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними равен 90 градусов.

Справедлива следующая формула синуса угла между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi=\frac{|\bar{n}\cdot\bar{p}|}{|\bar{n}|\cdot|\bar{p}|}.$$

Таким образом, для нахождения данного угла достаточно знать лишь нормальный вектор плоскости и направляющий вектор прямой.



Скалярное произведение векторов уже найдено в пункте «а»: $\bar{n}\cdot\bar{p}=4$. Обратите внимание, что в формуле скалярное произведение находится под знаком модуля и возможный «минус» пропадает.

Вычислим длины векторов:

$$|\bar{n}|=\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$|\bar{p}|=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$$

По формуле: $\sin\varphi = \frac{|\bar{n}\cdot\bar{p}|}{|\bar{n}|\cdot|\bar{p}|} = \frac{|4|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{70}}$

На иррациональность в знаменателе забиваем, поскольку нам нужен сам угол:

$$\varphi = \arcsin\frac{4}{\sqrt{70}} \approx 0{,}5 \text{ рад.} \approx 29^\circ$$

Ответ:

а) $\bar{n}\cdot\bar{p} = 4 \neq 0$, значит, прямая пересекает плоскость;

б) $Q(-1; 6; 1)$;

в) $\omega: 7x - y - 2z + 15 = 0$;

г) $m: \frac{x+1}{-5} = \frac{y-6}{-7} = \frac{z-1}{-14}$;

д) $\varphi = \arcsin\frac{4}{\sqrt{70}} \approx 0{,}5 \text{ рад.} \approx 29^\circ$

Пример 4

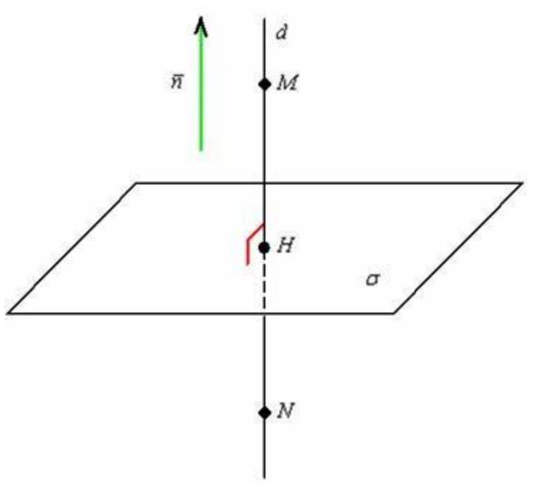
Дана плоскость $\sigma: 8x + 6y + 8z - 25 = 0$ и точка $M(3; 3; 3)$. Требуется:

а) составить канонические уравнения прямой d, проходящей через точку M, перпендикулярно данной плоскости;

б) найти точку $H = d \cap \sigma$ пересечения перпендикулярной прямой и плоскости;

в) найти точку N, симметричную точке M относительно плоскости σ.

Решение:



а) Найдём вектор нормали плоскости: $\bar{n}(8; 6; 8)$. Уравнения перпендикулярной прямой составим по точке $M(3; 3; 3)$ и вектору нормали $\bar{n}(8; 6; 8)$:

$$d: \frac{x-3}{8} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-3}{8}$$

б) Точка пересечения $H = d \cap \sigma$ перпендикулярной прямой и плоскости находится совместным решением их уравнений. Точка H является проекцией прямой d на плоскость «сигма».

Перепишем уравнения прямой в параметрической форме:

$$d: \frac{x-3}{8} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-3}{8} \quad \Rightarrow \quad d: \begin{cases} x = 8t + 3 \\ y = 6t + 3 \\ z = 8t + 3 \end{cases}$$

Основание перпендикуляра H принадлежит данной прямой, и координатам данной точки соответствует определённое значение параметра: $H(8t_0 + 3; 6t_0 + 3; 8t_0 + 3)$. Но точка H также принадлежит и плоскости. Подставим параметрические координаты в уравнение плоскости:

$$8\cdot(8t_0 + 3) + 6\cdot(6t_0 + 3) + 8\cdot(8t_0 + 3) - 25 = 0$$

$$64t_0 + 24 + 36t_0 + 18 + 64t_0 + 24 - 25 = 0$$

$164t_0+41=0 \Rightarrow t_0=-\dfrac{41}{164}=-\dfrac{1}{4}$ – подставим найденное значение параметра в параметрические координаты точки:

$$H(8t_0+3;\,6t_0+3;\,8t_0+3) \;\Rightarrow\; H\left(8\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+3;\,6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+3;\,8\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+3\right) \;\Rightarrow\; H\left(1;\,\frac{3}{2};\,1\right)$$

в) Рассмотрим отрезок MN. Если точка N симметрична точке M относительно плоскости, то, очевидно $MH=NH$. Точка H делит отрезок MN пополам. По условию нам дан один из концов отрезка M, а в предыдущем пункте найдена середина H. Таким образом, по формулам деления отрезка пополам, нетрудно найти координаты нужной точки N.

Координаты симметричной точки N найдем по формулам координат середины отрезка:

$$x_H=\frac{x_M+x_N}{2} \Rightarrow x_N=2x_H-x_M=2\cdot 1-3=-1$$

$$y_H=\frac{y_M+y_N}{2} \Rightarrow y_N=2y_H-y_M=2\cdot\frac{3}{2}-3=0$$

$$z_H=\frac{z_M+z_N}{2} \Rightarrow z_N=2z_H-z_M=2\cdot 1-3=-1$$

Таким образом: $N(-1;\,0;\,-1)$

Ответ:

а) $d:\dfrac{x-3}{8}=\dfrac{y-3}{6}=\dfrac{z-3}{8}$;

б) $H\left(1;\,\dfrac{3}{2};\,1\right)$;

в) $N(-1;\,0;\,-1)$.

Пример 5

Даны скрещивающиеся прямые $d_1:\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-1};\quad x+2=0,\qquad d_2:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z}{1}$. Через прямую d_1 провести плоскость, параллельную прямой d_2.

Решение:

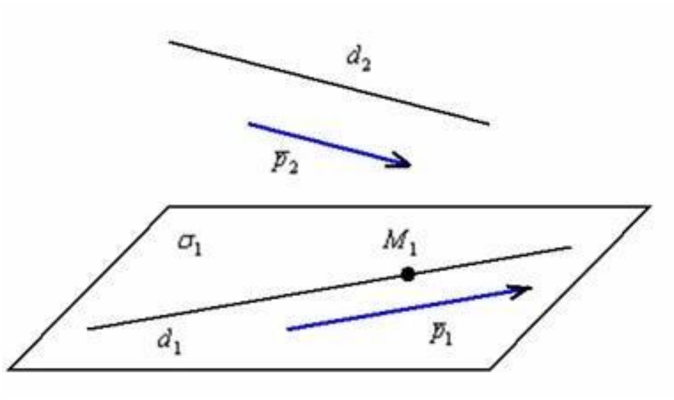
По условию требуется найти уравнение плоскости σ_1, которая проходит через прямую d_1 параллельно второй прямой.

Уравнение плоскости составим по точке и двум неколлинеарным векторам.

Поскольку прямая d_1 должна лежать в плоскости σ_1, то нам подойдёт произвольная точка M_1, принадлежащая первой прямой, и её направляющий вектор:

$$d_1:\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1};\quad x+2=0 \;\Rightarrow\; M_1(-2;\,2;\,-1),\ \overline{p}_1(0;\,3;\,-1)$$

С другой стороны, плоскость σ_1 должна быть параллельна прямой $d_2:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z}{1}$, а, значит, и её направляющему вектору $\overline{p}_2(4;\,-2;\,1)$.



Так как прямые скрещиваются, то их направляющие векторы $\overline{p}_1, \overline{p}_2$ будут не коллинеарны.

Уравнение плоскости σ_1 составим по точке $M_1(-2;2;-1)$ и двум неколлинеарным векторам $\overline{p}_1(0;3;-1), \overline{p}_2(4;-2;1)$:

$$\begin{vmatrix} x-(-2) & 0 & 4 \\ y-2 & 3 & -2 \\ z-(-1) & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (z+1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+2)-4(y-2)-12(z+1)=0$$

$$x+2-4y+8-12z-12=0$$

Ответ: $\sigma_1 : x-4y-12z-2=0$

Тема 4. Комбинаторика

Пример 1

У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

Решение.

Имеем набор {я, я, г, г, г}. Всего перестановок пятиэлементного множества ***5!***, но мы не должны учитывать перестановки, в которых объекты одного типа меняются местами несколько раз, поэтому нужно поделить на возможное число таких перестановок: ***2!х3!.*** Получаем в итоге

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3} = 10.$$

Ответ: 10 способов.

Пример 2

Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

Решение.

Имеем 14 претендентов и 13 рабочих мест. Сначала выберем работников на первую специальность, то есть 4 женщин из 6:

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = 15\,.$$

Далее независимо аналогичным образом выберем мужчин на вторую специальность:

$$C_8^6 = \frac{8!}{6!\,(8-6)!} = 28\,.$$

Осталось 2 женщины, 2 мужчин и 3 вакантных места, которые, по условию, могут занять любые из четырех оставшихся человек. Это может быть сделано 2 вариантами:

1. 1 женщина и 2 мужчин (выбираем женщину $C_2^1 = 2$ способами)
2. 1 мужчина и 2 женщины (выбираем мужчину $C_2^1 = 2$ способами).

В итого получаем $15 \cdot 28(2+2) = 1680$ способов.

Ответ: 1680 способов.

Пример 3 (размещения)

В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

Решение.

Т.к. все пассажиры должны ехать в разных вагонах, требуется отобрать 4 вагона из 9 с учетом порядка (вагоны отличаются №), эти выборки – размещения из n различных элементов по m элементов, где n=9, m=4.

Число таких размещений находим по формуле:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1).$$

Получаем: $A_n^m = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$

Ответ: 3024 способами можно рассадить в поезде 4 человека.

Пример 4 (правило сложения, сочетания)

В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

Решение.

Не менее 2-х человек, т.е 2+7 или 3+6 или 4+5 человек (5+4, 6+3, 7+2 – те же самые комбинации). В каждой выборке важен только состав, т.к. члены подгруппы не различаются по ролям, т.е. выборки − сочетания из n различных элементов по m элементов, их число:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,.$$

Число выборок из 2-х человек: $C_9^2 = \frac{9!}{2!\,(9-2)!} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36\,.$

Число выборок из 3-х человек: $C_9^3 = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{6} = 84\,.$

Число выборок из 4-х человек: $C_9^4 = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{24} = 126\,.$

Применяем правило сложения: $C_9^2 + C_9^3 + C_9^4 = 36 + 84 + 126 = 246$ способов

Ответ: 246 способов.

Пример 5 (сочетания, правило произведения)

Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

Решение.

Создавая первую бригаду, отбирают 3 человека из 20, создавая вторую – 5 из оставшихся 17, создавая третью – 12 из оставшихся 12. Для выборок важен только состав (роли членов бригады не различаются). Эти выборки - сочетания из n различных элементов по m элементов, их число:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Создавая сложную выборку (из 3-х бригад), воспользуемся правилом умножения:

$$N = C_{20}^3 \cdot C_{17}^5 \cdot C_{12}^{12} = \frac{20!}{3!\,(20-3)!} \cdot \frac{17!}{5!\,(17-5)!} \cdot \frac{12!}{12!\,(12-12)!} =$$

$$= \frac{20!}{3!\,17!} \cdot \frac{17!}{5!\,12!} \cdot \frac{12!}{12!\,0!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{3!} \cdot \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{5!} = 7\,054\,320\,,$$

Ответ: 7 054 320 способов.

Пример 6 (сочетания)

Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

Решение.

Т.к. известно, что двое мальчиков войдут в команду, то остается отобрать 3 из 8. Для выборки важен только состав (по условию все члены команды не различаются по ролям). Следовательно, выборки – сочетания из n различных элементов по m элементов, их число:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,, \text{при } \mathrm{n} = 8, \mathrm{m} = 3.$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Ответ: 56 способов сформировать команду

Пример 7 (сочетания, прямой подсчет)

В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

Решение.

Способ 1. В одной игре участвуют 2 человека, следовательно, нужно вычислить, сколькими способами можно отобрать 2-х человек из 15, причем порядок в таких парах не важен. Воспользуемся формулой для нахождения числа сочетаний (выборок, отличающихся только составом) из n различных элементов по m элементов

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,, \text{при } \mathrm{n} = 15, \mathrm{m} = 2.$$

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{2!\,(15-2)!} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105.$$

Способ 2. Первый игрок сыграл 14 партий (с2-м, 3-м, 4-м, и так до 15-го), 2- ой игрок сыграл 13 партий (3-м, 4-м, и т.д. до 15-го, исключаем то, что с первым партия уже была), 3-ий игрок − 12 партий, 4-ый − 11 партий, 5 – 10 партий, 6 – 9 партий, 7 – 8 партий, 8 – 7 партий, 9-ый – 6, 10-ый – 5, 11-ый – 4, 12-ый – 3, 13-ый – 2, 14-ый – 1, а 15-ый уже играл со всеми. Итого: 14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=105 партий.

Ответ: 105 партий.

Пример 8 (сочетания)

Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

Решение.

Различных дробей из 6 чисел: 3, 5, 7, 11, 13, 17 можно составить

$$C_6^2 \cdot 2 = \frac{6!}{4!2!} \cdot 2 = 5 \cdot 6 = 30 \text{ штук}$$

(C_6^2 способами выбираем два числа из 6, и двумя способами составляем из них дробь: сначала одно число – числитель, другое знаменатель и наоборот). Из этих 30 дробей ровно 15 будут правильные (т.е., когда числитель меньше знаменателя):

Ответ: 30; 15.

Пример 9. (перестановки, перестановки с повторениями)

Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове Гора и Институт?

Решение.

1) В слове «гора» четыре буквы, все они различны, поэтому можно получить всего $N_1 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ различных слова.

2) В слове «институт» 8 букв, из них две буквы «и», три буквы «т» и по одной букве «н», «с» и «у». Поэтому всего можно получить перестановками букв

$$N_2 = \frac{8!}{2!\,3!\,1!\,1!\,1!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 3360$$

различных слов.

Ответ: 24 и 3360 слов.

Пример 10 (прямой подсчет)

Каких чисел от 1 до 1 000 000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых она не встречается?

Решение.

Подсчитаем количество чисел от 1 до 999 999 (число 1 000 000 содержит единицу, его сразу отбросим), в записи которых нет единиц. Каждую цифру можно выбрать 9 способами (любая цифра кроме 1), поэтому все 6 цифр (по правилу произведения) можно выбрать 9^6 способами (если в числе до значащих цифр стоят нули, мы их просто отбрасываем). При этом один вариант (000000) нужно убрать, так как число 0 не рассматривается. Получаем всего $N = 9^6 - 1 = 531440$ чисел.

Так как всего чисел 1 000 000, то видно, что чисел без единицы среди чисел от 1 до 1 000 000 больше, чем тех, в записи которых единица есть.

Ответ: Чисел без единицы среди чисел от 1 до 1 000 000 больше, чем тех, в записи которых единица есть.

Тема 5. Координаты и векторы

Пример 1

Заданы векторы $\bar{a} = (-3; 5)$ и $\bar{b} = (0; -1)$. Найти координаты вектора $c\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$

Решение. $c\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (-3; 5) + (0; -1) = (-3 + 0; 5 + (-1)) = (-3; 4)$

Пример 2

Вектор $\bar{a} = (3; -2)$. Найти координаты вектора $2\bar{a}$

Решение. $2\bar{a} = 2 \cdot (3; -2) = (6; -4)$

Пример 3

Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если A(−4;2), B(1;−3)

Решение: $\overline{AB} = (-1(-4); -3-2) = (5-5)$

Пример 4

Найти длину вектора $\bar{a} = (-4; 3)$

Решение: $|\bar{a}| = (-4)^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

Пример 5

Найти длину вектора $\bar{a} = (1; 0; -4)$

Решение: $|\bar{a}| = 1^2 + 0^2 + (-4)^2 = 1 + 16 = 17$

Пример 6

Известно, что скалярное произведение двух векторов $\bar{a} \cdot \bar{b} = 2$, а их длины $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 2$. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение:

$$\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 60^0$$

Пример 7

Найти угол между векторами $\bar{a} = (1; \sqrt{3})$ и $\bar{b} = (1; 0)$

Решение:

$$\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{1 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 60^0$$

Пример 8

Найти угол между векторами $\bar{a} = (1; 3)$ и $\bar{b} = (2; 1)$

Решение:

$$\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 45^0$$

Пример 9

Зная разложения вектора $\bar{a}$ по базисной системе векторов: $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{k}$, записать координаты этого вектора в пространстве.

Решение:

Коэффициенты при ортах и есть координатами вектора, поэтому из того, что $\bar{a} = 3 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} - 1 \cdot \bar{k}$, получаем, что $\bar{a} = (3; 0; -1)$.

Пример 10

Вектор $\bar{a}$ задан своими координатами: $\bar{a} = (2; -1; 5)$. Записать разложение данного вектора по ортам осей координат.

Решение:

Координаты вектора - это коэффициенты при ортах координатных осей в разложении вектора по базисной системе векторов, поэтому искомое разложение:

$$\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}$$

Пример 11

Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если их длины соответственно равны 2 и 3, а угол между ними 60°.

Решение:

$$\vec{a}\,\vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^0 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

Пример 12

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (3; -1)$ и $\vec{b} = (-2; 7)$

Решение: Скалярное произведение

$$\vec{a}\vec{b} = 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 7 = -6 - 7 = -13$$

Пример 13

Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = (6; 7; 10)$ и $\vec{b} = (8; 5; 9)$

Решение:

Составляем определитель и вычисляем его:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \vec{k} \\ 6 & 7 & 10 \\ 8 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \bar{\imath}\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - \bar{\jmath}\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{\imath}(7 \cdot 9 - 5 \cdot 10) - \bar{\jmath}(6 \cdot 9 - 8 \cdot 10) + \vec{k}(6 \cdot 5 - 8 \cdot 7) = 13\bar{\imath} - 26\bar{\jmath} - 26\vec{k} =$$

$$= (13; -26; -26)$$

Пример 14

Вычислить объем пирамиды, построенной на векторах

$\vec{a} = (2; 3; 5)$, $\vec{b} = (1; 4; 4)$ и $c\bar{c} = (3; 5; 7)$

Решение:

Решение. Найдем смешанное произведение заданных векторов, для это составим определитель, по строкам которого запишем координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $c\bar{c}$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 7 = -4$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$$

Пример 15

Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A(3; 6) имеет координаты (9; 3). Найдите сумму координат точки B.

Решение:

Пусть координаты точки $B(x; y)$. Тогда $\overrightarrow{AB}(x-3; y-6) = (9; 3)$

Отсюда: $x-3=9$, значит, $x=12$

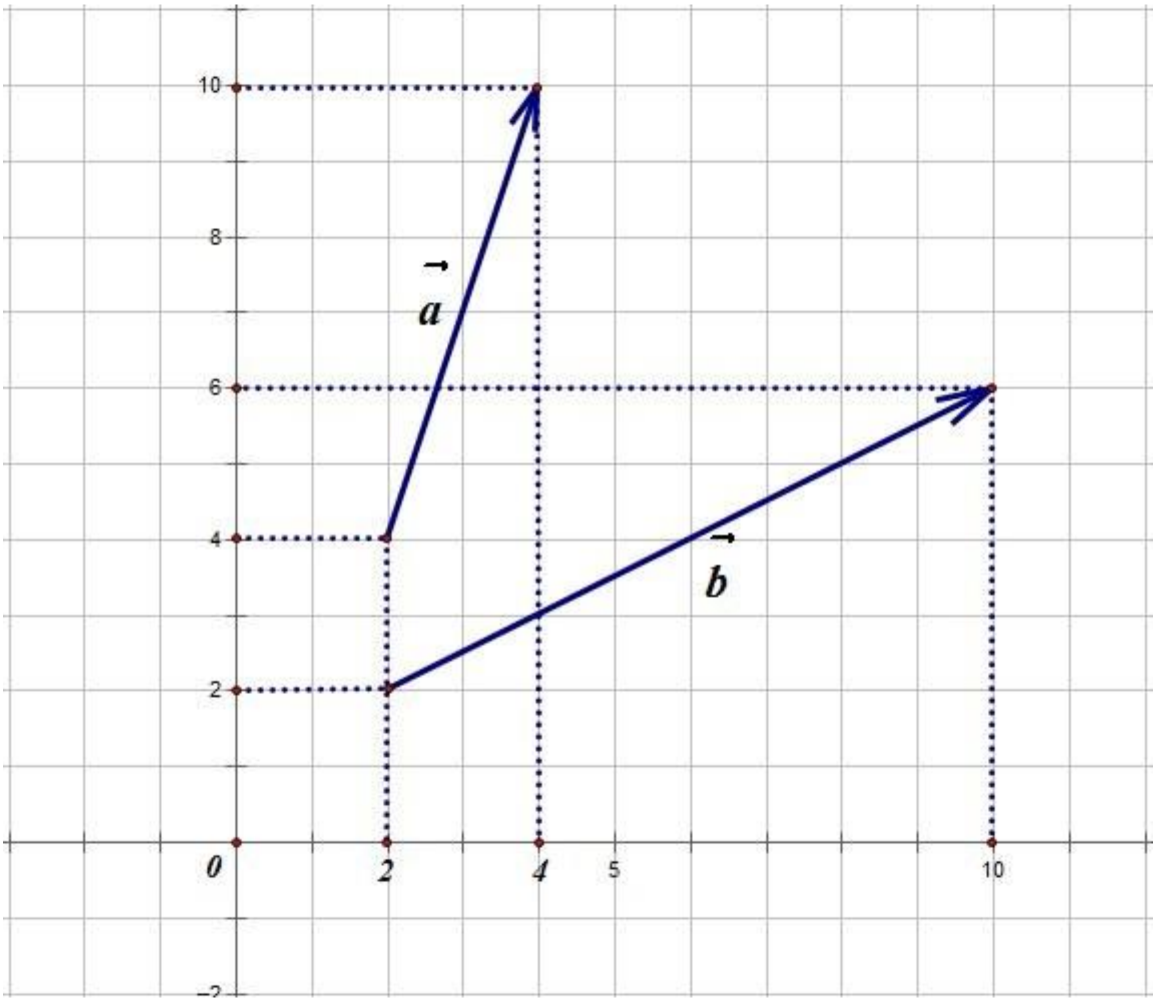
$y-6=3$, значит, $y=9$

Сумма координат точки B равна $x+y=12+9=21$

Ответ: 21.

Пример 16

Даны вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$



Найдите:

А. Сумму координат вектора $\vec{a}+\vec{b}$

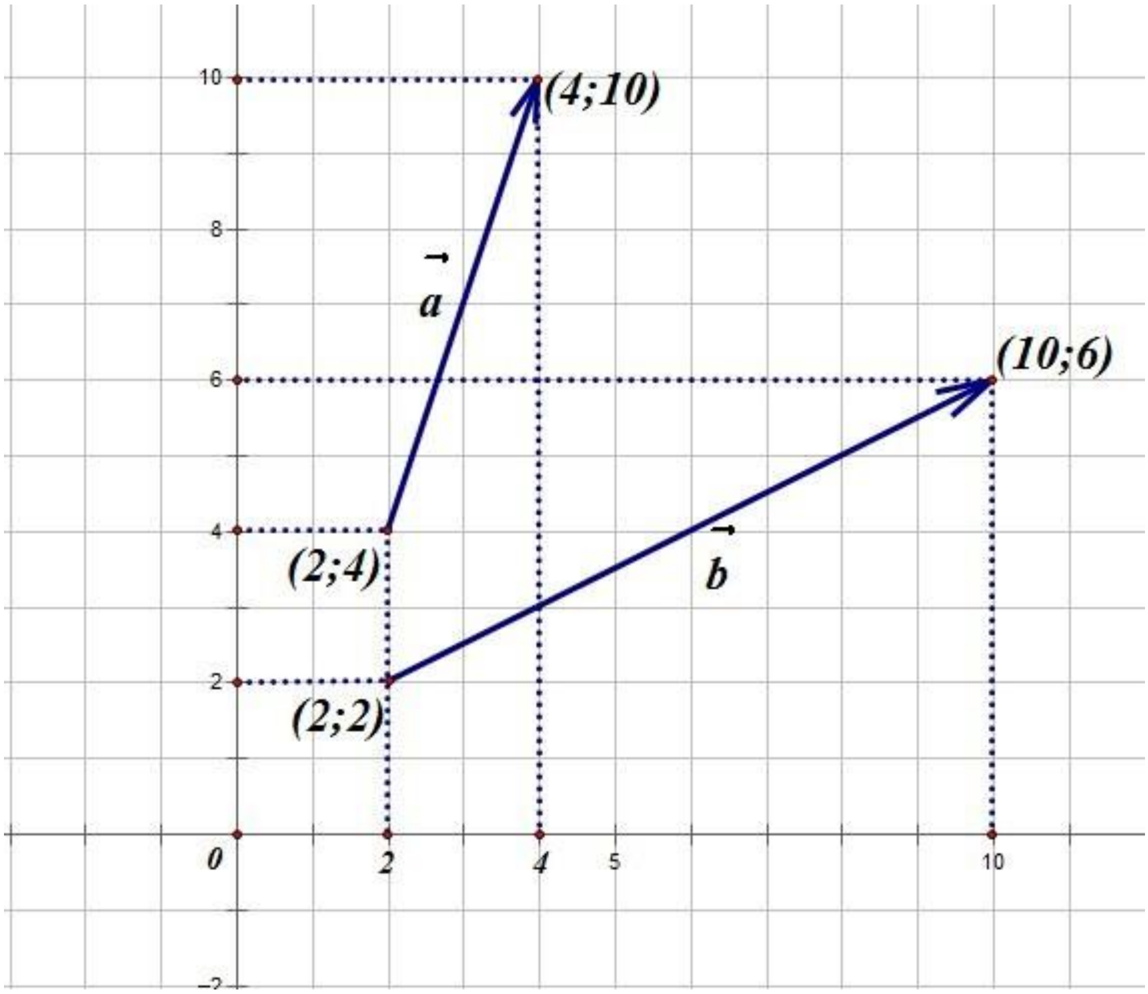
Б. Квадрат длины вектора $\vec{a}+\vec{b}$

В. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Г. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Решение:

А. Найдем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для этого сначала найдем координаты начала и конца каждого вектора:



Чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала:

Координаты вектора $\vec{a}\,(4-2\,;10-4\,)=(2\,;6\,)$.

Координаты вектора $\vec{b}\,(10-2\,;6-2\,)=(8\,;4\,)$

Координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равны сумме соответствующих координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $(2+8\,;6+4\,)=(10;10\,)$

Сумма координат вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равна 20

Ответ: 20.

Б. Квадрат длины вектора равен сумме квадратов его координат, поэтому квадрат длины вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равен $10^2+10^2=100+100=200$

Ответ: 200.

В. Скалярное произведение векторов $a\,(2\,;6\,)$ и $b\,(8\,;4\,)$ равно сумме произведений одноименных координат.

$$\left(\vec{a}\vec{b}\right)=2\times 8+6\times 4=40$$

Ответ: 40.

Г. Косинус угла α между векторами $\vec{a}\,(2\,;6\,)$ и $\vec{b}\,(8\,;4\,)$ вычисляется по формуле:

$$\cos\alpha=\frac{2\times8+6\times4}{\sqrt{2^2+6^2}\sqrt{8^2+4^2}}=\frac{40}{\sqrt{40}\sqrt{80}}=\frac{40}{40\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Отсюда $\alpha=45^\circ$

Ответ: 45°

Тема 6. Основы тригонометрии

Базовый уровень

Пример 1. Вычислить $\cos^2\frac{31\pi}{50}+\sin^2\frac{31\pi}{50}$.

Решение:

$$\cos^2\frac{31\pi}{50}+\sin^2\frac{31\pi}{50}=1$$

***Ответ:* 1.**

Пример 2. Найти значение **sinα , если** $\cos\alpha=0{,}8$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

Решение:

Так как синус в IV четверти имеет отрицательное значение,

то $\sin\alpha=-\sqrt{1-0{,}8^2}=-\sqrt{1-0{,}64}=-0{,}6$.

***Ответ:* – 0,6.**

Пример 3. Найти значение $25\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4};\ 0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

Решение:

Из формулы $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ найдём $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{1+\frac{9}{16}}=\frac{16}{25}$. Так как α лежит в I четверти, то **cosα** положителен и $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

Из формулы $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ найдём $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$.

$$25\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha=25\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{4}{5}=\frac{36}{5}=7{,}2.$$

***Ответ:* 7,2.**

Пример 4. Решите уравнение $\sin\frac{x}{5}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

. $\sin\frac{x}{5}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\frac{x}{5}=(-1)^k\cdot\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi\cdot k,\quad k\in Z$

Умножим левую и правую части равенства на 5 и, учитывая, что $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$,

получаем $x=(-1)^k\cdot\frac{5\pi}{3}+5\pi\cdot k,\quad k\in Z$.

Ответ:. $x=(-1)^k\cdot\frac{5\pi}{3}+5\pi\cdot k,\quad k\in Z$

Пример 5. Вычислить $\sin\frac{19\pi}{34}\cos\frac{\pi}{17}-\cos\frac{19\pi}{34}\sin\frac{\pi}{17}$.

Решение:

Согласно формулам сложения,

имеем $\sin\frac{19\pi}{34}\cos\frac{\pi}{17}-\cos\frac{19\pi}{34}\sin\frac{\pi}{17}=\sin\left(\frac{19\pi}{34}-\frac{\pi}{17}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

Ответ: **1.**

Пример 6. Приведите значение аргумента к I четверти: $\sin\frac{23\pi}{14}$.

Решение:

По алгоритму формул приведения: $\sin\frac{23\pi}{14}=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)=-\cos\frac{\pi}{7}$.

Ответ: $-\cos\frac{\pi}{7}$.

Повышенный уровень

Пример 7. Упростить $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{2\sin^4\alpha}+1$.

Решение:

$$\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{2\sin^4\alpha}+1=\frac{(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha)-\cos^4\alpha}{2\sin^4\alpha}+1=$$
$$=\frac{\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}{2\sin^4\alpha}+1=\frac{\cos^2\alpha\cdot 2\sin^2\alpha}{2\sin^4\alpha}+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Пример 8. Вычислить $\frac{8\cdot\cos10^0\cdot\cos20^0\cdot\cos40^0\cdot\cos80^0}{\sin80^0}$.

Решение:

Воспользуемся формулами преобразования произведений в сумму и формулами приведения, получим:

$$\frac{8\cdot\cos10^0\cdot\cos20^0\cdot\cos40^0\cdot\cos80^0}{\sin80^0}=\frac{8(\cos10^0\cdot\cos80^0)\cdot\cos20^0\cdot\cos40^0}{\sin80^0}=$$
$$=\frac{4\cos70^0\cdot\cos20^0\cdot\cos40^0}{\sin80^0}=\frac{4(\cos70^0\cdot\cos20^0)\cdot\cos40^0}{\sin80^0}=\frac{2\cos50^0\cdot\cos40^0}{\sin80^0}=$$
$$=\frac{\cos10^0}{\sin(90^0-10^0)}=\frac{\cos10^0}{\cos10^0}=1.$$

.

Ответ: **1.**

Пример 9. Решите уравнение **3 ctgx-cos2x=1+2sin2x.**

Решение:

$$3\,\mathrm{ctg}\,x-\cos 2x=1+2\sin 2x \Leftrightarrow 3\,\mathrm{ctg}\,x-2\sin 2x=1+\cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\,\mathrm{ctg}\,x-2\sin 2x=\cos^2 x \Leftrightarrow 3\frac{\cos x}{\sin x}-4\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x\cdot\left(\frac{3}{\sin x}-4\sin x-\cos x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0;\\ \frac{3}{\sin x}-4\sin x-\cos x=0.\end{array}\right.$$

Уравнение $\frac{3}{\sin x}-4\sin x-\cos x=0 \Leftrightarrow \begin{cases}3-4\sin^2 x-2\cos x\cdot\sin x=0;\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

Уравнение $3-4\sin^2x-2\cos x\cdot\sin x=0 \Leftrightarrow 3\cos^2x-\sin^2x-2\cos x\cdot\sin x=0$ – однородное уравнение второй степени, которое решается путём почленного деления на $\cos^2x$ или $\sin^2x$ $(\cos x\neq 0,\ \sin x\neq 0)$. Разделим на $\cos^2x$: $\mathrm{tg}^2x+2\mathrm{tg}x-3=0$ – уравнение второй степени. Путём подстановки $\mathrm{tg}x=t$ приводим его к алгебраическому квадратному: $t^2+2t-3=0$, где $t^1=-3$; $t_2=1$.

$$\mathrm{tg}\,x=-3,\ x_1=-\mathrm{arctg}3+\pi k_1;\ \ \mathrm{tg}\,x=1,\ x_2=\frac{\pi}{4}+\pi k_2;$$

$$\cos x=0,\ x_3=\frac{\pi}{2}+\pi k_3,\text{ где } k_1,\ k_2,\ k_3\in Z$$

При всех значениях x_1, x_2, x_3 $\sin x\neq 0$.

Ответ:. $-\mathrm{arctg}3+\pi k_1;\ \frac{\pi}{4}+\pi k_2;\ \frac{\pi}{2}+\pi k_3\ \ k_1,k_2,k_3\in Z$

Тема 8. Многогранники и круглые тела

Пример 1. Чему равна полная поверхность прямой треугольной призмы, если ее высота равна 50, а стороны основания 13, 37 и 40?

Решение:

Периметр основания призмы равен P=13+17+40=90. Площадь боковой поверхности $S_{бок}=90\cdot 50=4500$.

Площадь основания найдем по формуле Герона. Его полупериметр p=45 и $S_{осн}=\sqrt{45(45-13)(45-37)(45-40)}=\sqrt{45\cdot 32\cdot 8\cdot 5}=240$.

Осталось вычислить полную поверхность призмы: $S=2\cdot 240+4500=4980$.

Ответ: 4980.

Пример 2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат со стороной 2. Боковое ребро призмы равно $\sqrt{2}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью треугольника AB_1C и плоскостью основания призмы.

Решение:

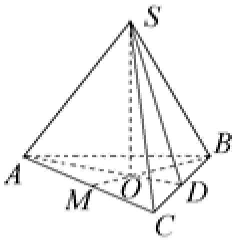
Плоскость AB_1C пересекает плоскость основания про прямой AC. Построим линейный угол, соответствующий углу между этими плоскостями. Т.к. ABCD – квадрат, то его диагонали пересекаются под прямым углом, т.е. $BO\perp AC$. Далее, т.к. призма правильная, то $B_1A=B_1C$. Треугольник AB_1C – равнобедренный. Его медиана B_1O является также его высотой, т.е. $B_1O\perp AC$. Следовательно, линейный $\angle B_1OB$ равен углу между плоскостями.

Рассмотрим треугольник B_1OB. Поскольку призма – прямая, то угол B в треугольнике – прямой. $B_1B=\sqrt{2}$ по условию задачи. $BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}2\sqrt{2}=\sqrt{2}$. Т.к. катеты в прямоугольном треугольнике B_1OB равны, то $\angle B_1OB=45^0$.

Ответ: 45^0.

Пример 3. Высота правильной пирамиды равна $\sqrt{5}$, апофема 4. Найдите длину бокового ребра.

Решение:



На чертеже изобразим пирамиду SABC, ее высоту SO и апофему SD. Т.к. пирамида правильная, точка O является центром вписанной окружности – точкой пересечения биссектрис, которые также являются высотами и медианами.

Найдем отрезок OD, как катет прямоугольного треугольника SOD: $OD = \sqrt{16-5} = \sqrt{11}$.

Медианы AD и BM правильного треугольника ABC равны и точкой O делятся в отношении 2:1. Следовательно $BO = 2OD = 2\sqrt{11}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник SOB. Боковое ребро SB является его гипотенузой. По теореме Пифагора $SB = \sqrt{5 + 4 \cdot 11} = \sqrt{49} = 7$.

Ответ: 7.

Пример 4. Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна $3\sqrt{3}$, а ее грани наклонены к плоскости основания под углом 60^0. Найдите объем пирамиды.

Решение:

Воспользуемся чертежом к предыдущей задаче. Т.к. SABC правильная пирамида, точка O является центром вписанной окружности – точкой пересечения биссектрис, которые также являются высотами и медианами. Следовательно,

$AD \perp BC$

. SD также является медианой и высотой равнобедренного треугольника CSB. Значит, $SD \perp BC$.

Таким образом, линейный угол SDO равен двугранному углу между плоскостью основания пирамиды и плоскостью грани SBC и равен 60^0.

Рассмотрим правильный треугольник ABC. Путь его сторона равна a. Тогда его площадь равна $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$, откуда $a = 2\sqrt{3}$. Найдем высоту треугольника: $AD = a \sin 60^0 = 2\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$. По свойству медиан $OD = \dfrac{1}{3}AD = 1$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник SOD.

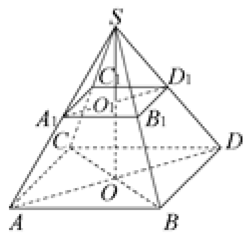
$SO = OD \ \mathrm{tg}\, 60^0 = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Вычислим объем пирамиды: $V = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

Ответ: 3.

Пример 5. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны 2. Через середины боковых ребер проведена плоскость. Найти объем многогранника, заключенного между этой плоскостью и плоскостью основания пирамиды.

Решение:



Отрезки, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, и D_1A_1, соединяющие середины боковых ребер, являются средними линиями боковых граней. Таким образом, $A_1B_1 \| AB$ и $A_1C_1 \| AC$, и, в соответствии с признаком параллельности плоскостей плоскость, содержащая точки A_1, B_1, C_1 и D_1 параллельна плоскости основания. Следовательно, многогранник $ABCDA_1B_1C1D_1$ является усеченной пирамидой.

По свойству средней линии сторона верхнего основания равна $\frac{1}{2}\cdot 2=1$. Площадь верхнего основания: $S_1=1^2=1$.

Площадь нижнего основания $S_2=2^2=4$. Диагональ нижнего основания – квадрата ABCD: $AD=2\sqrt{2}$. Поскольку пирамида правильная, то O – центр квадрата, т.е. точка пересечения диагоналей, и $OD=\sqrt{2}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник SOD. Вычислим высоту пирамиды SO как длину одного из катетов этого треугольника: $SO=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$. Отрезок O_1D_1 – средняя линия этого треугольника, т.к. параллелен основанию OD и проходит через середину стороны SD. Таким образом, $O_1O=\frac{1}{2}SO=\frac{\sqrt{2}}{2}$ – высота усеченной пирамиды.

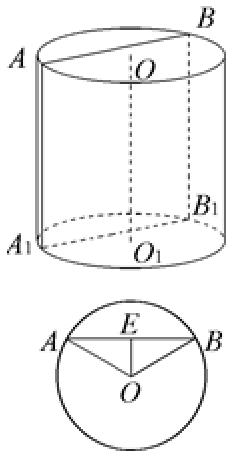
Вычислим объем усеченной пирамиды:

$$V=\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3}\left(1+\sqrt{1\cdot 4}+4\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot 7=\frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{2}}{6}$.

Пример 6. Осевое сечение цилиндра – квадрат со стороной 50. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 7 от нее.

Решение:



Высота и диаметр цилиндра равны 50, его радиус равен 25.

Поскольку плоскость параллельна оси OO_1, то она пересекает боковую поверхность цилиндра по прямым AA_1 и BB_1, параллельным OO_1 и перпендикулярным основаниям. Таким образом, сечение, площадь которого требуется найти, представляет собой прямоугольник, стороны AA_1 и BB_1 которого равны 50.

Расстояние от оси цилиндра до плоскости AA_1B равно длине перпендикуляра OE, опущенного из точки O на прямую AB. Чтобы вычислить длину AB, рассмотрим верхнее основание подробнее. является высотой и, следовательно, медианой равнобедренного треугольника AOB. Таким образом, AE=EB.

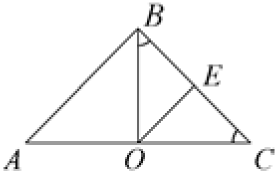
В прямоугольном треугольнике OEB гипотенуза OB является радиусом цилиндра и равна 25; катет OE равен 7 по условию задачи. Найдем катет EB: $EB=\sqrt{625-49}=\sqrt{576}=24$. Отсюда AB=2•24=48.

Площадь сечения AA_1BB_1 равна 48•50=2400.

Ответ: 2400.

Пример 7. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45^0. Расстояние от центра основания до образующей равно $3\sqrt{2}$. Найдите высоту конуса.

Решение:



Рассмотрим осевое сечение конуса. Оно представляет собой равнобедренный треугольник ABC, углы при основании которого равны 45^0. Угол в вершине B треугольника – прямой. BO – ось конуса – является также высотой треугольника ABC, а, следовательно, биссектрисой угла B. Таким образом, $\angle OBC = 45^0$.

Опустим перпендикуляр OE на отрезок BC. Его длина и есть расстояние от центра основания O до образующей BC, которое равно $3\sqrt{2}$.

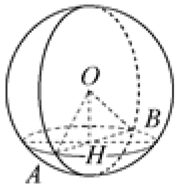
Рассмотрим прямоугольный треугольник OBE. Высота конуса BO является его гипотенузой.

$$BO = \frac{OE}{\sin \angle OBE} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}/2} = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 8. Шар, радиус которого равен 13, пересечен плоскостью на расстоянии 10 от центра. Найдите площадь сечения.

Решение:



Проведем осевое сечение шара плоскостью, перпендикулярной той, которая дана в условии задачи. Две плоскости пересекаются по прямой AB.

Искомое сечение является окружностью, диаметр которой равен длине отрезка AB. В плоскости AOB опустим перпендикуляр OH из точки O на прямую AB. Поскольку плоскости перпендикулярны, длина OH и есть расстояние от точки O до заданной плоскости, т.е. OH=10.

Рассмотрим прямоугольный треугольник OHB. Его гипотенуза OB является радиусом сферы и равна 13. Найдем катет HB: $HB = \sqrt{169 - 100} = \sqrt{69}$.

Поскольку OH – высота равнобедренного треугольника AOB, то O – середина AB, т.е. радиус сечения. Таким образом, площадь сечения равна $\pi\left(\sqrt{69}\right)^2 = 69\pi$.

Ответ: 69π.

Тема 9. Начала математического анализа. Интеграл и его применение.Пределы

При вычислении пределов используют основные теоремы о пределах, свойства непрерывных функций и правила, вытекающие из этих теорем и свойств.

<u>Правило 1.</u> Чтобы найти предел в точке x_0 *функции, непрерывной в этой точке, надо в функцию, стоящую под знаком предела, вместо аргумента x подставить его предельное значение* x_0.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x+2}{2x-3} = \frac{8}{1} = 8.$

<u>Правило 2.</u> Если при отыскании предела дроби предел знаменателя равен нулю, а предел числителя отличен от нуля, то предел такой функции равен $+\infty$ *или* $-\infty$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x+2}{2x-6} = \infty.$

<u>Правило 3.</u> Если при отыскании предела дроби предел знаменателя равен ∞, *а предел числителя отличен от нуля, то предел такой функции равен нулю.*

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{7}{tgx}=0.$

Часто подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty;\ \infty-\infty;\ 0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty.$$

Нахождение предела функции в этих случаях называется раскрытием неопределенности.

Правило 4. Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ *раскрывается путем преобразования подпредельной функции т.о., чтобы в числителе и знаменателе выделить множитель, предел которого равен нулю, и, сократив на него дробь, найти предел частного. Для этого числитель и знаменатель либо раскладывают на множители, либо домножают на сопряженные числителю и знаменателю выражения.*

Пример 4.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-3)}{x}=\frac{-1}{2}.$$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})}{(3-\sqrt{2x+1})(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-2x-1)(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(8-2x)(2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{2(4-x)(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to4}\frac{3+\sqrt{2x+1}}{2(2+\sqrt{x})}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Правило 5. Если подпредельное выражение содержит тригонометрические функции, тогда, чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ *используют первый замечательный предел.*

Пример 6.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin8x}{tg4x}=2\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin8x}{8x}:\frac{tg4x}{4x}\right)=2\lim_{x\to0}\frac{\sin8x}{8x}:\lim_{x\to0}\frac{tg4x}{4x}=2\cdot1:1=2$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos8x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 4x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin4x}{4x}\right)^2\cdot16=16.$$

Правило 6. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ *при* $x\to\infty$, *числитель и знаменатель подпредельной дроби необходимо разделить на высшую степень аргумента и находить далее предел частного.*

Возможны результаты:

1) искомый предел равен отношению коэффициентов при старших степенях аргумента числителя и знаменателя, если эти степени одинаковы;

2) предел равен бесконечности, если степень аргумента числителя выше степени аргумента знаменателя;
3) предел равен нулю, если степень аргумента числителя ниже степени аргумента знаменателя.

Пример 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+7}{9x^2+2x-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}{9+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}=\dfrac{5}{9}$,

т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^2}=0.$

Пример 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^3+1}}{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}}=\left[\dfrac{2}{0}\right]=\infty.$

Пример 9.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-7}}{\sqrt[4]{x^6+2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^5}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^5}}}=0.$$

Можно было сразу сравнить степени аргумента числителя и знаменателя.

Пример 7. Степени равны, значит, предел равен отношению коэффициентов при старших степенях, т.е. $\frac{5}{9}$.

Пример 8. Степень числителя $\frac{3}{2}$, знаменателя – 1, значит, предел равен ∞.

Пример 9. Степень числителя 1, знаменателя – $\frac{3}{2}$, значит, предел равен 0.

<u>Правило 7</u>. *Чтобы раскрыть неопределенность вида* $[\infty-\infty]$, *числитель и знаменатель подпредельной дроби необходимо домножить на сопряженное выражение.*

Пример 10.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-5x}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=-\frac{5}{2}.$$

<u>Правило 8</u>. *Чтобы раскрыть неопределенность вида* $\left[1^{\infty}\right]$ *используют второй замечательный предел и его следствия.*

Можно доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=e^k$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k$.

Пример 11.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=e^{3}.$$

Пример 12. $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{4x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-2x}\right)^{-2x\cdot(-2)}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-2}=e^{-2}.$$

Пример 13.

$$\lim_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{4}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{x}\cdot 4}=\left[\lim_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{x}}\right]^{4}=e^{6\cdot 4}=e^{24}.$$

<u>Правило 9</u>. При раскрытии неопределенностей, подпредельная функция которых содержит б.м.в., необходимо заменить пределы этих б.м. на пределы б.м., эквивалентных им.

Пример 14.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin^{2}x}{\sin 2x-x^{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x+x^{2}}{2x-x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3+x)}{x(2-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3+x}{2-x}=\frac{3}{2}.$$

При $x\to 0$ $\sin x\sim x,\ \sin 2x\sim 2x.$

Пример 15.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^{2}-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

При $x\to 2$ $\sin(x-2)\sim x-2,\ x-2\to 0.$

<u>*Правило Лопиталя.*</u>

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.

Т.е. при раскрытии неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ можно использовать формулу:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 16.

а) $$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^{2}-3)}{x^{2}+3x-10}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^{2}-3}}{2x+3}=\frac{4}{7}.$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\left(x\ln x-\sqrt{x+x^{2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x\ln x-\sqrt{x+x^{2}}\right)\left(x\ln x+\sqrt{x+x^{2}}\right)}{\left(x\ln x+\sqrt{x+x^{2}}\right)}=$$

$$=\lim\ \left(x^{2}\ln^{2}x-x-x^{2}\right)$$

$x\to\infty$ $\qquad x\ln x+ \qquad x+$
x^2

$=\infty.$ $\qquad \overline{x\ln x+\sqrt{x+x^2}}$

Производная функции

Пример 17.

Найти производную функции $ff(x) = x^2 + 2$ по определению.

Решение

Рассмотрим произвольную точку x_0 и соответствующее значение функции в этой точке $f(x_0) = x_0^2 + 2$.

Зададим приращение Δx и вычислим значение функции в точке $x_0 + \Delta x$:

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2$$

Найдём приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2 - (x_0^2 + 2) =$$
$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2 - x_0^2 - 2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

По определению производной в точке:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x^{\to 0}) = 2x_0$$

Поскольку в качестве x_0 можно рассмотреть *любую* точку x области определения функции $f(x) = x^2 + 2$, то проведём замену $x_0 = x$ и получим $f'(x_0) = 2x$.

Проверим результат: $f'(x_0) = (x^2 + 2)' = 2x + 0 = 2x$.

Пример 18. Найти производную функции $y = 3\cos x$

*Решение**:***

Продифференцируем заданную функцию:

$$y' = (3\cos x)'$$

Согласно правилу вынесения константы за знак производной, последнее равенство можно записать в виде:

$$y' = 3 \cdot (\cos x)'$$

По таблице производных находим, что

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Тогда получаем:

$$y' = (3\cos x)' = 3 \cdot (\cos x)' = 3 \cdot (-\sin x) = -3\sin x$$

Ответ: $y' = -3\sin x$

Пример 19. Найти производную функции $y = x^2 + x - 3$

Решение:

Искомая производная $y' = (x^2 + x - 3)'$

Согласно правилу, производная суммы/разности функций равна сумме/разности производных от каждой из них:

$$y' = (x^2 + x - 3)' = (x^2)' + (x)' - (3)' = 2x + 1 - 0 = 2x + 1$$

Ответ: $y' = 2x + 1$

Пример 20. Найти производную функции $y = x^2 \cdot \arcsin x$
Решение:

Искомая производная $y' = (x^2 \cdot \arcsin x)'$

Согласно правилу дифференцирования произведения, имеем:

$$y' = (x^2)' \cdot \arcsin x + x^2 \cdot (\arcsin x)' = 2x \cdot \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ответ: $y' = 2x \cdot \arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Пример 21. Найти производную функции $y = \frac{\sin x}{2x+1}$

Решение:

Искомая производная $y' = (\frac{\sin x}{2x+1})'$

Исходная функция представляет собой отношение двух функций: $ff(x) = \sin x$ и $g(x) = 2x + 1$.

Применим правило дифференцирования дроби:

$$y' = \frac{(\sin x)' \cdot (2x + 1) - \sin x \cdot (2x + 1)'}{(2x + 1)^2}$$

Применяя таблицу производных и правило дифференцирования суммы двух функций, получаем:

$$y' = \frac{\cos x \cdot (2x + 1) - \sin x \cdot ((2x)' + (1)')}{(2x + 1)^2}$$

Константу выносим за знак производной:

$$y' = \frac{(2x + 1) \cdot \cos x - \sin x \cdot (2(x)' + 0)}{(2x + 1)^2} = \frac{(2x + 1)\cos x - 2\sin x}{(2x + 1)^2}$$

Ответ: $y' = \frac{(2x + 1)\cos x - 2\sin x}{(2x + 1)^2}$

Пример 22. Найти производную сложной функции $y = \sqrt[3]{x^2 + tg\, x + 15}$

Решение:

Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2 + tg\, x + 15}\right)' = \left((x^2 + tg\, x + 15)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция.

Применяем правило дифференцирования сложной функции

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2 + tg\, x + 15}\right)' = \left((x^2 + tg\, x + 15)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2 + tg\,x + 15)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tg\,x + 15)'$$

Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + tg\,x + 15)^2}} \cdot ((x^2)' + (tg\,x)' + (15)')$$

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + tg\,x + 15)^2}} \cdot \left(2x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Ответ: $$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + tg\,x + 15)^2}} \cdot \left(2x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Пример 23. Найти производную сложной функции $y = \sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}$

Решение: При нахождении производной сложной функции, прежде всего, необходимо ***правильно*** разобраться во вложениях. В тех случаях, когда есть сомнения, можно использовать полезный приём: берем любое значение «икс», например, $x = 1$ и пробуем подставить данное значение в выражение.

1) Сначала нам нужно вычислить выражение $1 + \sqrt{1} = 2$, значит, сумма $(x + \sqrt{x})$ – самое глубокое вложение.

2) Затем необходимо вычислить логарифм: $\ln x$

3) Далее косинус: $\cos(\ln 2)$

4) Потом косинус возвести в куб: $\cos^3(\ln 2)$

5) На пятом шагу разность: $3 - \cos^3(\ln 2)$

6) И, наконец, самая внешняя функция – это квадратный корень: $\sqrt{3 - \cos^3(\ln 2)}$

Формула дифференцирования сложной функции $\left(u(v)\right)' = u'(v) \cdot v'$ применяется в обратном порядке, от самой внешней функции, до самой внутренней. Решаем (в скобках над знаками равенства указаны номера пояснений, которые написаны ниже):

$$y' = \left(\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}\right)' \overset{(1)}{=} \frac{1}{2\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}} \cdot \left(3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))\right)' \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}} \cdot \left((3)' - \left(\cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))\right)'\right) \overset{(3)}{=}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}} \cdot \left(0 - 3\cos^2(\ln(x + \sqrt{x})) \cdot \left(\cos(\ln(x + \sqrt{x}))\right)'\right) \overset{(4)}{=}$$

$$= \frac{-3\cos^2(\ln(x + \sqrt{x})) \cdot \left(-\sin(\ln(x + \sqrt{x}))\right) \cdot \left(\ln(x + \sqrt{x})\right)'}{2\sqrt{3 - \cos^3(\ln(x + \sqrt{x}))}} \overset{(5)}{=}$$

$$= \frac{3\cos^2(\ln(x+\sqrt{x}))\cdot\sin(\ln(x+\sqrt{x}))}{2\sqrt{3-\cos^3(\ln(x+\sqrt{x}))}\cdot(x+\sqrt{x})}\cdot(x+\sqrt{x})' \overset{(6)}{=}$$

$$= \frac{3\cos^2(\ln(x+\sqrt{x}))\cdot\sin(\ln(x+\sqrt{x}))}{2\sqrt{3-\cos^3(\ln(x+\sqrt{x}))}\cdot(x+\sqrt{x})}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

Ответ: $$y' = \frac{3\cos^2(\ln(x+\sqrt{x}))\cdot\sin(\ln(x+\sqrt{x}))}{2\sqrt{3-\cos^3(\ln(x+\sqrt{x}))}\cdot(x+\sqrt{x})}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

(1) Берем производную от квадратного корня.
(2) Берем производную от разности, используя правило $(uu \pm vv)' = uu' \pm vv'$.
(3) Производная тройки равна нулю. Во втором слагаемом берем производную от степени (куба).
(4) Берем производную от косинуса.
(5) Берем производную от логарифма.
(6) Берем производную от самого глубокого вложения $(x+\sqrt{x})$

Интегралы

Пример 24

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int\left(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+\mathrm{tg}5\right)dx$$

Решение:

$$\int\left(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+\mathrm{tg}5\right)dx =$$

$$= \int x\,dx + \int\sqrt{x}\,dx - \int 3x^5 dx + \int\frac{2}{x^3}\,dx - \int\frac{1}{\sin^2 x}\,dx + \int \mathrm{tg}5\,dx =$$

$$= \int x\,dx + \int x^{\frac{1}{2}}dx - 3\int x^5 dx + 2\int x^{-3}\,dx - \int\frac{1}{\sin^2 x}\,dx + \mathrm{tg}5\int dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3\cdot\frac{1}{6}x^6 + 2\cdot\frac{1}{(-2)}x^{-2} - (-\mathrm{ctg}x) + \mathrm{tg}5\cdot x + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + \mathrm{ctg}x + \mathrm{tg}5\cdot x + C,$$ где $C = const$

Проверка. Для того чтобы выполнить проверку нужно продифференцировать полученный ответ:

$$\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + \mathrm{ctg}x + \mathrm{tg}5\cdot x + C\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2)' + \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' - \frac{1}{2}(x^6)' + (x^{-2})' + (\mathrm{ctg}x)' + \mathrm{tg}5\cdot(x)' + (C)' =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot 6x^5 - (-2)\cdot(x^{-3}) - \frac{1}{\sin^2 x} + \mathrm{tg}5\cdot 1 + 0 =$$

$$= x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sin^2 x} + \mathrm{tg}5$$

Получена исходная **подынтегральная функция**, значит, интеграл найден правильно.

Пример 25

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int \left(\frac{1}{x} + x^2 \ln 5 - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

Решение:

$$\int \left(\frac{1}{x} + x^2 \ln 5 - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} + \ln 5 \int x^2\, dx - 4 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{3} \int x^{-\frac{4}{3}} dx + 7 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \ln|x| + \ln 5 \cdot \frac{1}{3} x^3 - 4 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)} \cdot x^{-\frac{1}{3}} + 7\arcsin x + C =$$

$$= \ln|x| + \frac{(\ln 5) \cdot x^3}{3} - 8\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 7\arcsin x + C,$$ где $C = const$

Пример 26

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int x^2 (3 + 4x)^2 dx$$

Решение:

Анализируя интеграл, мы видим, что что подынтегральное выражение представляет собой произведение двух функций, да еще и возведение в степень целого выражения. К сожалению, для интегралов нет хороших и удобных формул для интегрирования произведения и частного. А поэтому, когда дано произведение или частное, всегда имеет смысл посмотреть, а нельзя ли преобразовать подынтегральную функцию ***в сумму***?

В данном случае можно.

$$\int x^2 (3 + 4x)^2 dx = \int x^2 (9 + 24x + 16x^2) dx = \int (9x^2 + 24x^3 + 16x^4) dx =$$

$$= 9 \int x^2 dx + 24 \int x^3\, dx + 16 \int x^4\, dx =$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 24 \cdot \frac{1}{4} x^4 + 16 \cdot \frac{1}{5} x^5 + C =$$

$$= 3x^3 + 6x^4 + \frac{16}{5} x^5 + C,$$ где $C = const$

Проверка:

$$\left(3x^3 + 6x^4 + \frac{16}{5} x^5 + C\right)' = 3(x^3)' + 6(x^4)' + \frac{16}{5} (x^5)' + (C)' =$$

$$= 3 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 4x^3 + \frac{16}{5} \cdot 5x^4 + 0 = 9x^2 + 24x^3 + 16x^4 =$$

$$= x^2(9 + 24x + 16x^2) = x^2(3 + 4x)^2$$

Получена исходная **подынтегральная функция**, значит, интеграл найден правильно.

Пример 27. Найти неопределенный интеграл.

$$\int x(1 - 2x)^3 dx$$

Решение:

$$\int x(1 - 2x)^3 dx = \int x(1 - 6x + 12x^2 - 8x^3) dx =$$

$$= \int (x - 6x^2 + 12x^3 - 8x^4) dx = \frac{x^2}{2} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 12 \cdot \frac{x^4}{2} - 8 \cdot \frac{x^5}{5} + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x^3 + 3x^4 - \frac{8x^5}{5} + C, \quad \text{где } C = const$$

Пример 28. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx$$

Решение:

Когда мы видим в подынтегральном выражении дробь, то первой мыслью должен быть вопрос: А нельзя ли как-нибудь от этой дроби избавиться, или хотя бы её упростить?

Можно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(2x^{\frac{5}{2}} - x^2 + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = 2 \cdot \frac{1}{\frac{7}{2}} \cdot x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \sqrt{x^7} - \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \sqrt{x} + C, \quad \text{где } C = const$$

Пример 29. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{2x^2 - 3\sqrt{x} - 1}{2x} dx$$

Решение:

$$\int \frac{2x^2 - 3\sqrt{x} - 1}{2x} dx = \int \left(x + \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \ln|x| + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3\sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln|x| + C, \quad \text{где } C = const$$

Пример 30. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \sin(3x+1)\,dx$$

Решение:

Для решения интеграла наиболее подходит табличная формула

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

и всё хотелось бы свести к ней.

Идея метода замены состоит в том, чтобы сложное выражение (или некоторую функцию) заменить одной буквой.

В данном случае подходит: $t = 3x + 1$

Итак: $\int \sin(t)\,dx$. Но при замене остаётся dx.

Если осуществляется переход к новой переменной t, то в новом интеграле всё должно быть выражено через букву t, и дифференциалу dx там не место.

Следует логичный вывод, что dx нужно превратить в некоторое выражение, которое зависит только от t.

После того, как мы подобрали замену, в данном примере, $t = 3x + 1$, нам нужно найти дифференциал dt.

Так как $t = 3x + 1$, то $\quad dt = d(3x+1) = (3x+1)'dx = 3dx$

Итак: $dt = 3dx$

По правилам пропорции выражаем нужный нам dx: $\quad dx = \frac{dt}{3}$

Таким образом: $\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt.$

А это уже табличный интеграл $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ (таблица интегралов, естественно, справедлива и для переменной t).

$$\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C.$$

В заключении осталось провести обратную замену.

Вспоминаем, что $t = 3x + 1$.

$$\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C, \qquad \text{где } C = const$$

Пример 31. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt[3]{(3-4\mathrm{x})^2}}$$

Решение:

Проведем замену: $t = 3 - 4\mathrm{x}$.

$$dt = -4dx \Rightarrow dx = -\frac{dt}{4}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{2}{3}}dt = -\frac{1}{4}\cdot 3t^{\frac{1}{3}} + C$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{3-4x} + C, \quad \text{где } C = const$$

В результате замены исходный интеграл значительно упростился – свёлся к обычной степенной функции. ***Это и есть цель замены – упростить интеграл.***

Пример 32. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{xdx}{(3x+2)^7}$$

Решение:

Проведем замену: $t = 3x + 2$.

$$dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

Выразили dx, но что делать с оставшимся в числителе «иксом»?

Его мы выразим из той же замены $t = 3x + 2$.

$$t = 3x + 2 \Rightarrow 3x = t - 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$$

$$\int \frac{xdx}{(3x+2)^7} = \int \frac{\left(\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}\right)\frac{dt}{3}}{t^7} = \frac{1}{9}\int \frac{(t-2)dt}{t^7} = \frac{1}{9}\int \left(\frac{1}{t^6} - \frac{2}{t^7}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int (t^{-6} - 2t^{-7})\,dt = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{(-5)}t^{-5} - 2\cdot\frac{1}{(-6)}t^{-6}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{5(3x+2)^5} + \frac{1}{3(3x+2)^6}\right) + C, \quad \text{где } C = const$$

Пример 33.

Найти неопределенный интеграл $\int \ln x\, dx$.

Решение:

Используем формулу интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu$.

Формула применяется слева направо

Анализируем левую часть: $\int udv$. Очевидно, что в этом примере $\int \ln x\, dx$ (и во всех остальных) что-то нужно обозначить за u, а что-то за dv.

В интегралах рассматриваемого типа за u всегдаобозначается логарифм.

$$u = \ln x$$

$$dv = dx$$

То есть, за u обозначили логарифм, а за dv – **оставшуюся часть** подынтегрального выражения.

Следующий этап: находим дифференциал du:

$$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx$$

Теперь находим функцию v. Для того чтобы найти функцию v необходимо проинтегрировать **правую часть** нижнего равенства $dv = dx$:

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$$

Теперь конструируем правую часть: $uv - \int vdu$.

$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{ddx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$, где $C = const$.

<u>Применение формулы интегрирования по частям свело наше решение к двум простым интегралам.</u>

Выполним проверку. Для этого нужно взять производную от ответа:

$$(x \ln x - x + C)' = (x \ln x)' - (x)' + (C)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' - 1 + 0 =$$
$$= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл решён правильно.

В ходе проверки было использовано правило дифференцирования произведения: $(uv)' = u'v + uv'$. И это не случайно.

Формула интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$
и формула $(uv)' = u'v + uv'$ ***– это два взаимно обратных правила.***

Пример 34.

Найти неопределенный интеграл $\int x \ln^2 x\, dx$.

Решение:

Подынтегральная функция представляет собой произведение логарифма на многочлен.

$$u = \ln^2 x$$

$$dv = xdx$$

$$u = \ln^2 x \Rightarrow du = (\ln^2 x)' dx = 2 \ln x \cdot (\ln x)' dx = \frac{2 \ln x\, dx}{x}$$

$$dv = xdx \Rightarrow \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

Теперь всё готово для применения формулы $\int udv = uv - \int vdu$.

$$\int x \ln^2 x\, dx = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \int \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{2 \ln x\, dx}{x} \right) = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \int \ln x\, dx = (*)$$

Под интегралом у нас <u>*снова многочлен на логарифм!*</u>

Поэтому решение прерывается и правило интегрирования по частям применяется второй раз.

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x\,dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$(*) = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \int \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}\right)\right) = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{1}{2}\int x\,dx =$$

$$\frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1)}{4} + C,$$

где $C = const.$

Пример 35. Найти неопределенный интеграл

$$\int (x-2)e^{2x}dx$$

Решение: Интегрируем по частям:

$$u = x - 2 \;\Rightarrow\; du = (x-2)'dx = dx$$

$$dv = e^{2x}dx \;\Rightarrow\; v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int (x-2)e^{2x}dx = \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C =$$

$$= \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{(2x-5)e^{2x}}{4} + C, \quad \text{где } C = const$$

Пример 36. Найти неопределенный интеграл

$$\int x \cos 6x\,dx$$

Решение: Общее правило: **за u всегда обозначается многочлен**

Интегрируем по частям:

$$u = x \;\Rightarrow\; du = dx$$

$$dv = \cos 6x\,dx \;\Rightarrow\; v = \int \cos 6x\,dx = \frac{1}{6}\sin 6x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x\cos 6x\,dx = \frac{1}{6}x\sin 6x - \frac{1}{6}\int \sin 6x\,dx = \frac{1}{6}x\sin 6x - \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{6}\cos 6x\right) =$$

$$= \frac{1}{6}x\sin 6x + \frac{1}{36}\cos 6x + C, \quad \text{где } C = const$$

Пример 37. Найти неопределенный интеграл

$$\int \operatorname{arctg} 2x\, dx$$

Решение:

Интегрируем по частям:

$$u = \operatorname{arctg} 2x \quad \Rightarrow \quad du = (\operatorname{arctg} 2x)' dx = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot (2x)' dx = \frac{2dx}{1+4x^2}$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \operatorname{arctg} 2x\, dx = x \operatorname{arctg} 2x - 2\int \frac{xdx}{1+4x^2} = x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}\int \frac{d(1+4x^2)}{1+4x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + C, \qquad \text{где } C = const$$

Интеграл $\frac{2ddx}{1+4x^2}$ найден методом подведения функции под знак дифференциала, можно использовать и метод замены в «классическом» виде.

Пример 38. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2\, dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2 dx = 2\int_1^2 x^2 dx = \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3}$$

Пример 39. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^5 \frac{7dx}{x}$$

Решение:

$$\int_1^5 \frac{7dx}{x} = 7\int_1^5 \frac{dx}{x} = 7(\ln x)\Big|_1^5 = 7(\ln 5 - \ln 1) = 7\ln 5$$

Пример 40. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx$$

Решение:

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx = 8\int_{-2}^4 dx + 2\int_{-2}^4 x dx - \int_{-2}^4 x^2 dx =$$

$$= 8x\Big|_{-2}^{4} + 2\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_{-2}^{4} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{4} =$$

$$= 8(4-(-2)) + (4^2-(-2)^2) - \frac{1}{3}(4^3-(-2)^3) =$$

$$= 48 + 12 - 24 = 36$$

Пример 41. Вычислить определенный интеграл $\int_{-3}^{1}(2x^2+3x-1)dx$

Решение:

$$\int_{-3}^{1}(2x^2+3x-1)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x\right)\Big|_{-3}^{1} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1 - \left(-18 + \frac{27}{3} + 3\right) = \frac{7}{6} + \frac{3}{2} = \frac{8}{3}$$

Пример 42. Вычислить определенный интеграл $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$

Решение:

Главный вопрос здесь вовсе не в определенном интеграле, а в том, как правильно провести замену. Смотрим в таблицу интегралов и прикидываем, на что больше всего похожа подынтегральная функция? Очевидно, что на длинный логарифм:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C.$$

Но есть одна нестыковочка, в табличном интеграле под корнем $\boldsymbol{x^2}$, а в нашем – $\boldsymbol{x^4}$ «икс» в четвёртой степени. Из рассуждений следует и идея замены – неплохо бы нашу четвертую степень как-нибудь превратить в квадрат.

Сначала готовим наш интеграл к замене:

$$\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}} = \int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2)^2+16}}$$

Проводим замену: $\boldsymbol{t=x^2}$. Таким образом, в знаменателе будет: $\sqrt{t^2+16}$.

Выясняем, во что превратится оставшаяся часть ***xdx*** подынтегрального выражения, для этого находим дифференциал ***dt***:

$$dt = 2x\,dx \quad\Rightarrow\quad xdx = \frac{dt}{2}$$

По сравнению с заменой в неопределенном интеграле у нас добавляется дополнительный этап.

Находим новые пределы интегрирования.

Смотрим на нашу замену $\boldsymbol{t=x^2}$ и старые пределы интегрирования $\boldsymbol{a=0}$, $\boldsymbol{bb = \sqrt{33}}$**.**

Сначала подставляем в выражение замены $t=x^2$ нижний предел интегрирования, то есть, ноль: $t_1=0^2=0$

Потом подставляем в выражение замены $t=x^2$ верхний предел интегрирования, то есть, корень из трёх: $t_2=(\sqrt{3})^2=3.$

Продолжаем решение.

$$\frac{1}{2}\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}} = \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+16}\right|\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(3+\sqrt{25}) - \ln(0+\sqrt{0+16})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4) = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{4} = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,35$$

Ещё одно отличие от неопределенного интеграла состоит в том, что, после того, как мы провели замену, ***никаких обратных замен проводить не надо***.

Пример 43. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x+1}$

Решение:

Проведем замену переменной:

$$t=\cos x \quad\Rightarrow\quad dt=-\sin x\,dx \quad\Rightarrow\quad \sin x\,dx=-dt,$$

Новые переделы интегрирования: $t_1=\cos\frac{\pi}{2}=0;\quad t_2=\cos\pi=-1.$

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x+1} = -\int_0^{-1}\frac{dt}{t^2+1} = \int_{-1}^{0}\frac{dt}{t^2+1} = \left(\mathrm{arctg}(t)\right)\Big|_{-1}^{0} =$$

$$=\mathrm{arctg}0-\mathrm{arctg}(-1)=0+\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{0}.$$

Примечания: В рассмотренном интеграле – как раз тот случай, когда уместно применить свойство определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Пример 44. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx$

Решение:

Интегрируем по частям:

$$u=x \quad\Rightarrow\quad du=dx$$

$$dv=\mathrm{tg}^2x\,dx \quad\Rightarrow\quad v=\int \mathrm{tg}^2x\,dx=\mathrm{tg}x-x$$

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$\int_0^{\pi/4} x\,\mathrm{tg}^2x\,dx = \left(x(\mathrm{tg}x - x)\right)\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\mathrm{tg}x - x)\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - 0\cdot(\mathrm{tg}0 - 0) - \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}x\,dx + \int_0^{\pi/4} x\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}(x^2)\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\cos 0| + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16} - 0^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(1) Записываем решение в соответствии с формулой интегрирования по частям.

(2) Для произведения $x(\mathrm{tg}x - x)$ применяем формулу Ньютона-Лейбница. Для оставшегося интеграла используем свойства линейности, разделяя его на два интеграла.

(3) Берем два оставшихся интеграла.

(4) Применяем формулу Ньютона-Лейбница для двух найденных первообразных.

Пример 45. Вычислить определенный интеграл $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x\,dx$

Решение:

Интегрируем по частям:

$$u = \arccos 2x \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{2dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x\,dx = (x \arccos 2x)\Big|_{-1/2}^{1/2} + 2\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - 4x^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\arccos 1 + 2\,\frac{1}{2}\arccos(-1)\right) - \frac{1}{4}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{d(1 - 4x^2)}{\sqrt{1 - 4x^2}} =$$

$$=\frac{0}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-4x^2}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(0-0)=\frac{\pi}{2}.$$

Тема 10. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Пример 1. На 1000 телевизоров в среднем приходится 7 бракованных. Какова вероятность купить исправный телевизор?

Решение. п = 1000, т =1000 – 7 = 993 Р(А) = 993/1000 = 0,993.

Пример 2. На 1000 электрических лампочек в среднем приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку?

Решение. п = 1000, т =1000 – 5 = 995 Р(А) = 995/1000 = 0,995 = 199/200.

Пример 3. Из слова ЭКЗАМЕН случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность того, что она окажется согласной?

Решение. п = 7, т =4. Р(А) = 4/7.

Пример 4. Из слова ЭКЗАМЕН случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность того, что она окажется гласной?

Решение. п = 7, т = 3 Р(А) = 3/7.

Пример 5. В барабане шары для лотереи с номерами от 1 до 25 Какова вероятность того, что выпал шар с однозначным номером?

Решение. п = 25, т = 9 Р(А) = 9/25 = 0,36.

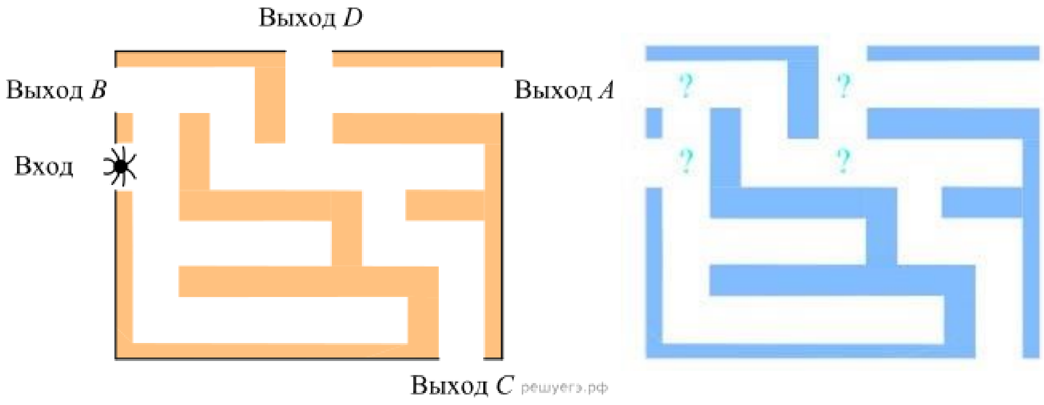
Пример 6. Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя чётными цифрами?

*Решение***.** Вероятность того, что на одном из требуемых мест окажется чётное число равна 0,5. Следовательно, вероятность того, что на двух местах одновременно окажутся два чётных числа равна 0,5 · 0,5 = 0,25.

Пример 7. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

*Решение***.** Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: 0,52 · 0,3 = 0,156.

Пример 8. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу D.



*Решение***.** На каждой из четырех отмеченных развилок паук с вероятностью 0,5 может выбрать или путь, ведущий к выходу D, или другой путь. Это независимые события, вероятность их произведения (события, состоящего в том, что паук дойдет до выхода D) равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность прийти к выходу D равна $(0{,}5)^4 = 0{,}0625$.

Пример 9. Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8 °С, равна 0,81. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8 °С или выше.

*Решение***.** Указанные события противоположны, поэтому искомая вероятность равна $1 - 0{,}81 = 0{,}19$.

Пример 10. При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.

*Решение***.** По условию, диаметр подшипника будет лежать в пределах от 66,99 до 67,01 мм с вероятностью 0,965. Поэтому искомая вероятность противоположного события равна $1 - 0{,}965 = 0{,}035$.

Пример 11. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

*Решение***.** Вероятность того, что батарейка исправна, равна 0,94. Вероятность произведения независимых событий (обе батарейки окажутся исправными) равна произведению вероятностей этих событий: $0{,}94 \cdot 0{,}94 = 0{,}8836$.

Пример 12. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

*Решение***.** Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три продавца заняты равна 0,027.

Пример 13. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.

*Решение***.** Вероятность того, что кофе останется в первом автомате равна $1-0{,}25=0{,}75$. Вероятность того, что кофе останется во втором автомате равна $1-0{,}25=0{,}75$. Вероятность того, что кофе останется в первом или втором автомате равна $1-0{,}15=0{,}85$. Поскольку $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$, имеем: $0{,}85=0{,}75+0{,}75-x$, откуда искомая вероятность $x=0{,}65$.

Пример 14. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

*Решение***.** Пусть A = «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет», B = «чайник прослужит больше двух лет», C = «чайник прослужит ровно два года», тогда A + B + C = «чайник прослужит больше года».

События A, B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события С, состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час, наносекунду и т. д. — равна нулю. Тогда:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=P(A)+P(B),$$

откуда, используя данные из условия, получаем

$$0{,}97=P(A)+0{,}89.$$

Тем самым для искомой вероятности имеем:

$$P(A)=0{,}97-0{,}89=0{,}08.$$

Пример 15. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

*Решение***.** Пусть A = «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет», B = «чайник прослужит больше двух лет», C = «чайник прослужит ровно два года», тогда A + B + C = «чайник прослужит больше года».

События A, B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события С, состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час и секунду — равна нулю. Тогда:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=P(A)+P(B),$$

откуда, используя данные из условия, получаем

$$0{,}93=P(A)+0{,}87.$$

Тем самым, для искомой вероятности имеем:

$$P(A)=0{,}93-0{,}87=0{,}06.$$

Пример 16. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,82. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,51. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 17.

*Решение***.** Рассмотрим события А = «в автобусе меньше 10 пассажиров» и В = «в автобусе от 10 до 17 пассажиров». Их сумма — событие A + B = «в автобусе меньше 18 пассажиров». События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем:

$0{,}82=0{,}51+P(B)$, откуда $P(B)=0{,}82-0{,}51=0{,}31$.

Пример 17. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

*Решение***.** Поскольку биатлонист попадает в мишени с вероятностью 0,8, он промахивается с вероятностью $1 - 0{,}8 = 0{,}2$. События попасть или промахнуться при каждом выстреле независимы, вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей. Тем самым, вероятность события «попал, попал, попал, промахнулся, промахнулся» равна 0,02.

Пример 18. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

*Решение***.** Найдем вероятность того, что перегорят обе лампы. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$.

Событие, состоящее в том, что не перегорит хотя бы одна лампа, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0{,}09 = 0{,}91$.

Пример 19. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98? В ответе укажите наименьшее необходимое количество выстрелов.

*Решение***.** Вероятность поразить мишень равна сумме вероятностей поразить ее при первом, втором, третьем и т. д. выстрелах. Поэтому задача сводится к нахождению наименьшего натурального решения неравенства

В нашем случае неравенство решается подбором, в общем случае понадобится формула суммы геометрической прогрессии, использование которой сведет задачу к простейшему логарифмическому неравенству.

Ответ: достаточно пяти выстрелов по мишени.

Пример 20. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос по теме «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

*Решение***.** Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35$.

Пример 21. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

*Решение***.** Команда может получить не меньше 4 очков в двух играх тремя способами: 3+1, 1+3, 3+3. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме их вероятностей. Каждое из этих событий представляет собой произведение двух независимых событий — результата в первой и во второй игре. Отсюда имеем: 0,32.

Пример 22. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

*Решение***.** Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО (здесь Х — хорошая, О — отличная погода). Найдем вероятности наступления такой погоды:

$$P(XXO) = 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2 = 0{,}128;$$
$$P(XOO) = 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8 = 0{,}128;$$
$$P(OXO) = 0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2 = 0{,}008;$$
$$P(OOO) = 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}128.$$

Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(XXO) + P(XOO) + P(OXO) + P(OOO) = 0{,}128 + 0{,}128 + 0{,}008 + 0{,}128 = 0{,}392.$$

Пример 23. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

*Решение***.** Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}0025$. Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$.

Приведем другое решение. Вероятность того, что исправен первый автомат (событие А) равна 0,95. Вероятность того, что исправен второй автомат (событие В) равна 0,95. Это совместные независимые события. Вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий, а вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения. Имеем:

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A\cdot B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}95 + 0{,}95 - 0{,}95\cdot 0{,}95 = 0{,}9975.$$

Пример 24. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

*Решение***.** Джон промахнется, если схватит пристрелянный револьвер и промахнется из него, или если схватит непристрелянный револьвер и промахнется из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0{,}4\cdot(1-0{,}9) = 0{,}04$ и $0{,}6\cdot(1-0{,}2) = 0{,}48$. События схватить пристрелянный или непристрелянный револьвер образуют полную группу (они несовместны и одно из них непременно наступает), поэтому, по формуле полной вероятности, Джон промахнется с вероятностью $0{,}04 + 0{,}48 = 0{,}52$.

Приведем другое решение. Джон попадает в муху, если схватит пристрелянный револьвер и попадет из него, или если схватит непристрелянный револьвер и попадает из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0{,}4\cdot 0{,}9 = 0{,}36$ и $0{,}6\cdot 0{,}2 = 0{,}12$. События схватить пристрелянный или непристрелянный револьвер образуют полную группу, поэтому по формуле полной вероятности получаем: $0{,}36 + 0{,}12 = 0{,}48$. Событие, состоящее в том, что Джон промахнется, противоположное. Его вероятность равна $1 - 0{,}48 = 0{,}52$.

Пример 25. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

*Решение***.** Вероятность того, что стекло сделано на первой фабрике и оно бракованное: $0{,}45 \cdot 0{,}03 = 0{,}0135$.

Вероятность того, что стекло сделано на второй фабрике и оно бракованное: $0{,}55 \cdot 0{,}01 = 0{,}0055$.

Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $0{,}0135 + 0{,}0055 = 0{,}019$.

Пример 26. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

*Решение***.** Анализ пациента может быть положительным по двум причинам: A) пациент болеет гепатитом, его анализ верен; B) пациент не болеет гепатитом, его анализ ложен. События быть больным или быть здоровым образуют полную группу (они несовместны и одно из них непременно наступает), поэтому можно применить формулу полной вероятности. Получим: 0,0545.

Пример 27. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

*Решение***.** Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате следующих событий: батарейка действительно неисправна и забракована справедливо или батарейка исправна, но по ошибке забракована.

События быть неисправной батарейкой или быть исправной образуют полную группу (они несовместны и одно из них непременно происходит), поэтому можно применить формулу полной вероятности. Ответ: 0,0296.

Пример 28. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

*Решение***.** Пусть событие A состоит в том, что яйцо имеет высшую категорию, события A1 и A2 состоят в том, что яйцо произведено в первом и втором хозяйствах соответственно. Тогда события и — события, состоящие в том, что яйцо высшей категории произведено в первом и втором хозяйстве соответственно. По формуле полной вероятности, вероятность того, что будет куплено яйцо высшей категории, равна. По условию эта вероятность равна 0,35, поэтому вероятность того, что купленное яйцо произведено в первом хозяйстве имеем 0,75.

Пример 29. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

*Решение***.** Рассмотрим события

A = кофе закончится в первом автомате,
B = кофе закончится во втором автомате.

Тогда

$$A \cdot B = \text{кофе закончится в обоих автоматах,}$$
$$A + B = \text{кофе закончится хотя бы в одном автомате.}$$

По условию $P(A) = P(B) = 0{,}3$; $P(A \cdot B) = 0{,}12$.

События А и В совместные, вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}3 + 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}48.$$

Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна $1 - 0{,}48 = 0{,}52$.

Пример 30. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.

Найдите вероятность того, что сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

*Решение***.** Для того, чтобы поступить хоть куда-нибудь, нужно сдать и русский, и математику как минимум на 70 баллов, а помимо этого еще сдать иностранный язык или обществознание не менее, чем на 70 баллов. Пусть A, B, C и D — это события, в которых сдает соответственно математику, русский, иностранный и обществознание не менее, чем на 70 баллов. Ответ: 0,408.

Пример 31. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

*Решение***.** Рассмотрим события А = «в автобусе меньше 15 пассажиров» и В = «в автобусе от 15 до 19 пассажиров». Их сумма — событие А + В = «в автобусе меньше 20 пассажиров». События А и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем: $0{,}94 = 0{,}56 + P(B)$,
откуда $P(B) = 0{,}94 - 0{,}56 = 0{,}38$.

Пример 32. Вероятность того, что на тестировании по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.

*Решение***.** Рассмотрим события А = «учащийся решит 11 задач» и В = «учащийся решит больше 11 задач». Их сумма — событие А + В = «учащийся решит больше 10 задач». События А и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем:

$0{,}74 = P(A) + 0{,}67$, откуда $P(A) = 0{,}74 - 0{,}67 = 0{,}07$.

Пример 33. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Результат округлите до сотых.

*Решение***.** Пусть на фабрике произведено 1000 тарелок. Из них 10%, то есть 100 штук, имеют дефект. Из этих 100 штук система контроля выявит 80%, то есть 80 штук. Остальные 20 тарелок с дефектами поступят в продажу. Таким образом, в продажу поступят 900 тарелок без дефектов и 20 тарелок с дефектами, всего 920 штук. Вероятность того, что выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов, составит 900/920=0,978. Округляя результат до сотых, получаем 0,98.

Пример 34. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

*Решение***.** Вероятность того, что первый магазин не доставит нужный товар равна $1-0{,}9=0{,}1$. Вероятность того, что второй магазин не доставит нужный товар равна $1-0{,}8=0{,}2$. Поскольку эти события независимы, вероятность их произведения (оба магазина не доставят товар) равна произведению вероятностей этих событий: $0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}02$.

Пример 35. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.

*Решение***.** Требуется найти вероятность произведения трех событий: «Статор» начинает первую игру, не начинает вторую игру, начинает третью игру. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Вероятность каждого из них равна 0,5, откуда находим: $0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}125$.

Пример 36. В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

*Решение***.** Чтобы пятирублевые монеты оказались в разных карманах, Петя должен взять из кармана одну пятирублевую и две десятирублевые монеты. Это можно сделать тремя способами: 5, 10, 10; 10, 5, 10 или 10, 10, 5. Эти события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

Ответ: 0,6.

Пример 37. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

*Решение***.** Пусть A — событие, состоящее в том, что мишень поражена стрелком с первого выстрела, B — событие, состоящее в том, что первый раз стрелок промахнулся, а со второго выстрела поразил мишень. Вероятность события A равна $P(A) = 0{,}7$. Событие B является произведением двух независимых событий, поэтому его вероятность равна произведению вероятностей этих событий: $P(B) = 0{,}3\cdot 0{,}7 = 0{,}21$. События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}7 + 0{,}21 = 0{,}91.$$

Пример 38. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Мотор» по очереди играет с командами «Статор», «Стартер» и «Ротор». Найдите вероятность того, что «Мотор» будет начинать с мячом только вторую игру.

*Решение***.** Требуется найти вероятность произведения трех событий: «Мотор» не начинает первую игру, начинает вторую игру, не начинает третью игру. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Вероятность каждого из них равна 0,5, откуда находим: $0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}125$.

Тема 11. Уравнения и неравенства

Линейные неравенства и системы неравенств

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{x-1}{3} - x > 1$.

Решение:

$$\frac{x-1}{3} - x > 1 \Leftrightarrow x - 1 - 3x > 3 \Leftrightarrow -2x > 4 \Leftrightarrow x < -2.$$

Ответ: x < – 2.

Пример 2. Решить систему неравенств $\begin{cases} 3x \le 0, \\ 2 + x > 0 \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 3x \le 0, \\ 2 + x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0, \\ x > -2; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2;\ 0\,].$$

Ответ: (– 2; 0].

Пример 3. Найти наименьшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x}{6} + \dfrac{2}{3}(x - 7) < \dfrac{3x - 20}{9}, \\ 3x - \dfrac{2x - 13}{11} > 2. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{6} + \dfrac{2}{3}(x - 7) < \dfrac{3x - 20}{9}, \\ 3x - \dfrac{2x - 13}{11} > 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 12x - 84 < 6x - 40, \\ 33x - 2x + 13 > 22; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x < 44, \\ 31x > 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{44}{9}, \\ x > \dfrac{9}{31}. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{9}{31};\ 4\dfrac{8}{9}\right)$

Квадратные неравенства

Пример 4. Решить неравенство $x^2 > 4$.

Решение:

$x^2 > 4$ $(x - 2)\cdot(x + 2) > 0$.

Решаем методом интервалов.

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

Неравенства высших степеней

Пример 5. Решить неравенство (x + 3)·(x^2 – 2x + 1) > 0.

Решение:

$$(x+3)\cdot(x^2-2x+1)>0 \Leftrightarrow (x+3)\cdot(x-1)^2>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x > -3. \end{cases}$$

Ответ: $(-3;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Пример 6. Найти середину отрезка, который является решением неравенства $4x^2 - 24x + 24 < 4y^2$, где $y = \sqrt{5-2x}$.

Решение:

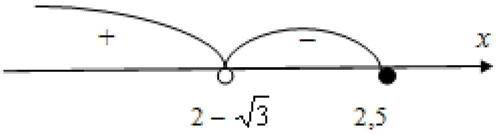
Область определения неравенства: $5 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2,5$.

С учётом области определения $4x^2 - 24x + 24 < 4y^2$ будет равносильно неравенству

$$4x^2 - 24x + 24 < 4\,(5-2x) \Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 4 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow (x - (2-\sqrt{3}))\cdot(x - (2+\sqrt{3})) < 0.$$

Решаем методом интервалов.



Решение неравенства: $x \in (2-\sqrt{3}) \cup 2{,}5$.

Середина отрезка: $\dfrac{2-\sqrt{3}+2{,}5}{2} = \dfrac{4{,}5-\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{4{,}5-\sqrt{3}}{2}$.

Рациональные неравенства

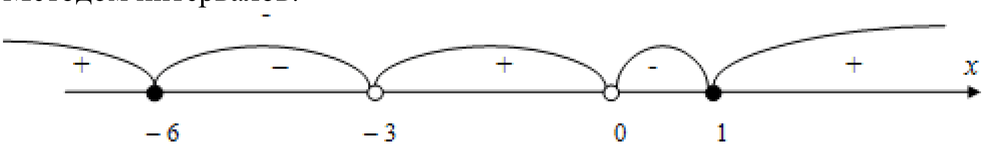
Пример 7. Найти все целые решения, удовлетворяющие неравенству $\dfrac{11+x}{x+3} \leq \dfrac{4}{x} - 1$.

Решение:

$$\frac{11+x}{x+3} \leq \frac{4}{x} - 1 \Leftrightarrow \frac{11+x}{x+3} - \frac{4}{x} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{11x + x^2 - 4x - 12 + x^2 + 3x}{x\cdot(x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 10x - 12}{x\cdot(x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 + 5x - 6)}{x\cdot(x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2\cdot(x+6)\cdot(x-1)}{x\cdot(x+3)} \leq 0$$

Методом интервалов:



Решение неравенства: $x \in [-6;-3) \cup (0;1]$.

Целые числа, принадлежащие полученным полуинтервалам: – 6; – 5; – 4; 1.

Ответ: – 6; – 5; – 4; 1.

Иррациональные неравенства

Помните! Начинать решение иррациональных неравенств нужно с нахождения области определения.

Пример 8. Решить неравенство $\sqrt{x+2} < 3$.

Решение:

Область определения: $x+2 \geq 0$.

Так как арифметический корень не может быть отрицательным числом, то $0 \leq x+2 < 9 \Leftrightarrow -2 \leq x < 7$.

Ответ: $[-2;7)$.

Пример 9. Найти все целые решения неравенства $(2x-3)\cdot\sqrt{4-x} \geq 0$.

Решение:

Область определения $4-x \geq 0$.

$\sqrt{4-x}$ – быть отрицательным не может, следовательно, чтобы произведение было неотрицательным достаточно потребовать выполнения неравенства $2x-3 \geq 0$, при этом учитывая область определения. Т.е. исходное неравенство равносильно системе $\begin{cases} 2x-3 \geq 0, \\ 4-x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2}, \\ x \leq 4. \end{cases}$ $x \in [1{,}5;\ 4]$.

Целыми числами из этого отрезка будут 2; 3; 4.

Ответ: 2; 3; 4.

Пример 10. Решить неравенство $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} \leq \sqrt{2x-12}$.

Решение:

Область определения: $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 9-x \geq 0, \\ 2x-12 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x \leq 9, \\ x \geq 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6, \\ x \leq 9. \end{cases}$

Преобразуем неравенство: $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{9-x} + \sqrt{2x-12}$. С учётом области определения видим, что обе части неравенства - положительные числа. Возведём обе части в квадрат и получим неравенство, равносильное исходному.

$x+1 \leq 9-x+2\sqrt{(9-x)(2x-12)}+2x-12$;

$2 \leq \sqrt{-2x^2+30x-108}$;

$4 \leq -2x^2+30x-108$;

$x^2-15x+56 \leq 0$;

$(x-7)(x-8) \leq 0$; т.е. $x \in [7;8]$, и этот числовой отрезок включён в область определения.

Ответ: $x \in [7;8]$.

Пример 11. Решить неравенство $|2x-1| - x \leq 0$.

Решение:

Раскрываем знак модуля.

$$1)\ \begin{cases} 2x-1<0, \\ -2x+1-x\le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{1}{2}, \\ x\ge\frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 2x-1\ge 0, \\ 2x-1-x\le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\frac{1}{2}, \\ x\le 1. \end{cases}$$

Объединим решения систем 1) и 2): $x\in\left[\frac{1}{3};1\right]$.

Ответ: $x\in\left[\frac{1}{3};1\right]$.

Показательные, логарифмические неравенства и системы неравенств

Пример 12. Решите неравенство $2^{10x-5}\ge\frac{1}{16}$.

Решение:

$$2^{10x-5}\ge\frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^{10x-5}\ge 2^{-4} \Leftrightarrow 10x\ge -4 \Leftrightarrow x\ge -0{,}4.$$

Ответ: $x\in[-0{,}4;+\infty)$.

Пример 13. Решите неравенство $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x-1}\ge\left(\frac{1}{7}\right)^{4}$.

Решение:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x-1}\ge\left(\frac{1}{7}\right)^{4} \Leftrightarrow 5x-1\le 4 \Leftrightarrow 5x\le 5 \Leftrightarrow x\ge 1.$$

Ответ: $x\ge 1$.

Пример 14. Решите неравенство $\log_3\frac{1+2x}{1+x}<1$.

Решение:

$$\log_3\frac{1+2x}{1+x}<1 \Leftrightarrow \log_3\frac{1+2x}{1+x}<\log_3 3 \Leftrightarrow 0<\frac{1+2x}{1+x}<3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+2x}{1+x}<3, \\ \frac{1+2x}{1+x}>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{1+x}>0, \\ \frac{1+2x}{1+x}>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>-1; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>-\frac{1}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>-\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-0{,}5;+\infty)$.

Пример 15. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2+5x+1\right)<0$.

Решение:

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2+5x+1\right)<0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2+5x+1\right)<\log_{\frac{1}{5}}1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+5x+1>1 \Leftrightarrow 2x^2+5x>0 \Leftrightarrow x\cdot(2x+5)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{5}{2}, \\ x>0. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -2{,}5)\cup(0; +\infty)$.

2.4 Оценочные средства расчетно-графической работы

Критерии оценивания

Оценка «***отлично***» ставится, если:

выполнены поставленные цели работы, студент четко и без ошибок ответил на все контрольные вопросы.

Оценка «***хорошо***» ставится, если:

выполнены все задания работы; студент ответил на все контрольные вопросы с замечаниями.

Оценка «***удовлетворительно***» ставится, если:

выполнены все задания расчетно-графической работы с замечаниями; студент ответил на все контрольные вопросы с замечаниями.

Оценка «***неудовлетворительно***» ставится, если:

студент не выполнил или выполнил неправильно задания расчетно-графической работы; студент ответил на контрольные вопросы с ошибками или не ответил на контрольные вопросы.

Тема 7. Функции и графики

Исследование функции состоит из следующих этапов:
1) Область определения, непрерывность, четность/нечётность, периодичность функции.
2) Асимптоты графика функции.
3) Нули функции, интервалы знакопостоянства.
4) Возрастание, убывание и экстремумы функции.
5) Выпуклость, вогнутость и перегибы графика.
6) Дополнительные точки и график по результатам исследования.
ПРАВИЛЬНЫЙ И АККУРАТНЫЙ ЧЕРТЁЖ – это основной результат решения!

1.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{1}{3}(x^3-14x^2+49x-36)$	2.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{(x+1)(x+8)}{x}$
3.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{x^2-1}{x}$	4.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{4x}{4+x^2}$
5.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{1}{x^2+1}$	6.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$
7.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{x^2}{x-1}$	8.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{1}{9}x(x-4)^3$
9.	Исследовать функцию и построить её график	10.	Исследовать функцию и построить её график

	$y=\frac{x^3}{x^2-1}$		$y=\frac{1}{1-x^2}$
11.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{2x^2}{1+x^2}$	12.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{x}{x^2-1}$
13.	Исследовать функцию и построить её график $y=x^3+3x^2-9x+5$	14.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{x-1}{x+1}$
15.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$	16.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{x-1}{x^2-2x}$
17.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{x^3+4}{x^2}$	18.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$
19.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{6x^2-x^4}{9}$	20.	Исследовать функцию и построить её график $y=(x-1)(x^2-5x+4)$
21.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{e^{x-1}}{x}$.	22.	Исследовать функцию и построить её график $y=\frac{e^x}{x}$
23.	Исследовать функцию и построить её график $y=x\cdot e^x$	24.	Исследовать функцию и построить её график $y=e^{2x-x^2}$
25.	Исследовать функцию и построить её график $y=x\ln x$	26.	Исследовать функцию и построить её график $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
27.	Исследовать функцию и построить её график $y=xe^{1-x}$	28.	Исследовать функцию и построить её график $y=x-arctgx$
29.	Исследовать функцию и построить её график $y=2^{\frac{1}{x^2}}$	30.	Исследовать функцию и построить её график $y=2^{\frac{1}{x}}$

2.5 Оценочные средства внеаудиторной самостоятельной работы

Критерии оценивания

Оценка «***отлично***» ставится, если:

- работа выполнена полностью.
- в логических рассуждениях и обоснованиях нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала);

Оценка «***хорошо***» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умения обосновывать рассуждения не являлись специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки);

Оценка «***удовлетворительно***» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух- трех недочетов в выкладках, чертежах или графика, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Оценка «***неудовлетворительно***» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными знаниями по данной теме в полной мере;
- работа показала полное отсутствие у учащегося обязательных знаний, умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

Тема 1. Развитие понятия о числе

Выполните действия:

1) (2,125 · 0,32 – 1,93) : 2,5 – 0,5.

2) 6,75 – 6,75 · (0,45 – 6,72 : 6,4).

3) $\dfrac{0{,}15-0{,}15\cdot 6{,}4}{-\dfrac{3}{8}+0{,}175}$.

4) $\dfrac{1{,}6\cdot 0{,}81-0{,}81}{3{,}57-3\dfrac{3}{4}}$.

5) $-0{,}09\cdot\left(-1\dfrac{1}{3}\right):\left(3{,}57:3{,}5-1{,}1\right)$.

6) $\left(1{,}68:1{,}6-1{,}5\right)\cdot\left(-\dfrac{5}{3}\right):\left(-0{,}09\right)$.

7) $\left(\dfrac{11}{15}-1\dfrac{9}{10}+\dfrac{5}{8}\right)\cdot 0{,}9+0{,}1$.

8) $0{,}8+0{,}2:\left(\dfrac{7}{15}-1\dfrac{1}{12}+\dfrac{9}{20}\right)$.

9) $-1{,}5+0{,}5\cdot\left(\dfrac{8}{15}-1{,}7+\dfrac{1}{6}\right)$.

10) $\left(-3\dfrac{4}{15}-\dfrac{3}{20}+\dfrac{5}{12}\right)\cdot 0{,}6-0{,}6$.

11) Вычислить 15% от 84.

12) Найти число, если 8% его равны 24.

13) На сколько процентов уменьшится произведение двух чисел, если одно из них уменьшить на 25%, а другое – на 50%?

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
– 1	10,8	4,05	– 2,7	– 1,5	$-8\frac{1}{3}$	$-\frac{31}{80}$	– 0,4	– 2	– 2,4	12,6	300	62,5%

Тема 2. Корни, степени и логарифмы

Базовый уровень

1) Вычислите $\frac{(\sqrt{3})^4}{18}$.

2) Вычислите $3\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{10}$.

3) Вычислить без калькулятора $\sqrt[4]{0,0081\cdot 16}$.

4) Найдите значение выражения $(10^{-10}\cdot 100^{6})^{-1}$.

5) Упростите выражение $2\sqrt{5}-\sqrt{45}+\sqrt{3}$.

6) Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{22}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}-11}\cdot\sqrt{11}$.

7) Найдите значение выражения $\frac{24^4}{2^6\cdot 3^3}:\frac{20^4}{2^7\cdot 5^8}$.

8) Вычислите $16^{\frac{5}{4}}-\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+27^{\frac{2}{3}}$.

9) Упростите выражение $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$.

10) Вычислить $(4\sqrt{3})^2+3$.

11) Выполните действия $\frac{0,1^2-0,5^2}{0,4\cdot 0,12+0,88\cdot 0,4}$.

12) Упростите выражение $2\cdot\sqrt{8\frac{1}{2}}-\sqrt{136}-5\sqrt{1\frac{9}{25}}$.

13) Вычислите значение выражения $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}{4^{\frac{5}{12}}}\cdot\pi^0$.

14) Вычислите значение выражения $\left(4^{-0,25}-2^{0,5}\right)\cdot\left[4^{-0,25}+\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$.

15) Вычислите $\left(\frac{1}{1000}\right)^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\cdot 64^{-\frac{2}{3}}-\left(3^2\right)^0\cdot 5$.

16) Вычислите $(0,2^{-13}\bullet 125^{-3}\bullet 0,2^{4})^{-20}:\cos 60^0$.

17) Вычислите $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

18) Вычислите значение выражения $\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+2\sqrt{6}}{(\sqrt{6}-1)\cdot(\sqrt{6}+1)}$.

19) Вычислите $\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(2\sin\frac{\pi}{4}-\cos\pi\right)$.

20) Вычислите $\left(\left(\frac{1}{64}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{27}}}$.

21) Вычислите $\frac{2^{-2}\cdot 5^{3}\cdot 10^{-4}}{2^{-3}\cdot 5^{2}\cdot 10^{-5}}$.

22) Упростите выражение (y – x) – (x – y).

23) Упростите выражение $3a(a + 2) – (a + 3)^2$.

24) Упростите выражение $(a – 4)^2 – 2a(3a – 4)$.

25) Упростите выражение $\left(b^{0,5}\right)^4+\left(b^0\right)^{\frac{1}{3}}$.

26) Упростите выражение $\frac{a^2}{a^2-1}-\frac{a}{a+1}$.

27) Сократите дробь $\frac{4x^3y^5}{2xy^4}$.

28) Упростите выражение $\frac{ab}{ab-ab^2}$.

29) Сократить дробь $\frac{p^2-2p}{p^2-4p+4}$.

30) Сократите дробь $\frac{1-6c+y-6cy}{1-12c+36c^2}$.

31) Сократите дробь $\frac{x-6\sqrt{x}+8}{4-\sqrt{x}}$.

32) Упростите выражение $\frac{a^2-4}{2a}:\frac{3a+6}{4a^2}$

33) Упростите выражение $\frac{a^2-b^2}{b}\cdot\frac{b^2}{ab+a^2}$.

34) Найдите значение выражения $3^{4a}\cdot 3^{-2a}$ при a=1/2.

35) Вычислите $\log_2 32^{-1}$.

36) Вычислите $\log_{\frac{1}{9}} 3$.

37) Вычислить $\log_5 125$.

38) Вычислите $\log_3 \sqrt[4]{3}$.

39) Вычислите $4^{\log_4 3}$.

40) Вычислите $3^{\log_{\sqrt{3}} 5}$.

41) Вычислите $\log_{2\sqrt{2}} 128$.

42) Найдите значение выражения $\log_6 2+\log_6 3$.

43) Найдите значение выражения $0,2^{\log_{0,2} 3}-1$.

44) Вычислить $8\cdot 0,5^{\log_{0,5} 3}$.

45) Вычислите $\sqrt{\lg 10000}$.

Повышенный уровень

46) Вычислите $\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2\sqrt{2}+3}$.

47) Вычислите $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt[6]{27}$.

48) Вычислите $\sqrt{7-2\sqrt{10}}:\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{10}+7}}-\dfrac{\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}}{\frac{1}{6}+0{,}1-\frac{1}{15}}$.

49) Вычислите $\sqrt[4]{9\sqrt{10}-18}\cdot\sqrt[4]{6+3\sqrt{10}}\cdot\sqrt[4]{128}$.

50) Вычислите $\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}:\left(27^{-\frac{2}{3}}+\sqrt[4]{84^3}-3^{-2}\right)^{-1}$.

51) Вычислите $\dfrac{\left(\frac{1}{15}\right)^{4+2\sqrt{3}}\cdot 5^{6+2\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{3+2\sqrt{3}}}$.

52) Упростить $\sqrt{(6-x)^2}-|x-7|$ если x > 7.

53) Упростить $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-2\right)^3}$.

54) Упростить $\dfrac{7\sqrt{x^2-6x+9}}{3-x}-\dfrac{3\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1}+\dfrac{\sqrt{-20x-4x^2-24}}{\sqrt{-5x-6-x^2}}$.

55) Вычислить $\log_2 \lg 100$.

56) Вычислить $\log_4 7\cdot\log_{49}27\cdot\log_9 64$.

57) Найти значение выражения $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{\sqrt{3}}{7+2\sqrt{10}}+\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

58) Вычислите $\dfrac{\lg\left(7-4\sqrt{3}\right)}{\lg\left(2-\sqrt{3}\right)}$.

59) Вычислите $\log_3\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

60) Упростить выражение $\log_{\sqrt{a}}\sqrt[3]{a}$.

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,5	120	0,6	0,01	$\sqrt{3}-\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}$	$6\cdot10^4$	$40\frac{2}{3}$	2	51

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
– 0,6	$-2\sqrt{34}$	1	– 1,5	5,25	2	4	1	1	4

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
100	2(y–x)	$2a^2-9$	$16-5a^2$	b^2+1	$\frac{a}{a^2-1}$	$2x^2y$	$\frac{1}{1-b}$	$\frac{p}{p-2}$	$\frac{1+y}{1-6c}$
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
$2-\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}a(a-2)$	$\frac{b}{a}(a-b)$	3	– 5	– 0,5	3	1/4	3	25

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

14/3	1	2	24	2	– 1	– 1	$1\frac{1}{3}$	12	$\sqrt[4]{84^3}$

51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
$8_{1/3}$	1	1	12	1	9/4	-1/2	2	– 2	2/3

Тема 3. Прямые и плоскости в пространстве

1) Из точки $A(3;-2;4)$ опустить перпендикуляр на плоскость $5x+3y-7z+1=0$

2) Найти проекцию точки $A(4;-3;1)$ на плоскость $x+2y-z-3=0$

3) Через прямую $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x+4y-3z+7=0$.

4) Написать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x}{7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{5}$ и $\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{5}$

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-1;-5)$ перпендикулярно плоскостям $3x-2y+2z+7=0$ и $5x-4y+3z+1=0$.

6) Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $M(2;3;-5)$ на плоскость $4x-2y+5z-12=0$

7) Найти уравнение плоскости, зная, что точка $P(4;-3;12)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

8) Найти расстояние от точки $M(3;5;5)$ до прямой $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$.

9) Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную прямой $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2}$.

10) Найти уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M(2;-1;-3)$ на прямую $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{-2}$

Ответы

1	2	3
$\frac{x-3}{8}=\frac{y-3}{6}=\frac{z-3}{8}$	$(5;-1;0)$	$11x-17y-19z+10=0$

4	5	6
$17x-13y-16z-10=0$	$2x+y-2z-15=0$	$\frac{7\sqrt{5}}{3}$ ед. $\approx$ 5,2 ед.

7	8	9	10
$4x-3y+12z-169=0$	$\sqrt{33}$ ед. $\approx$ 5,74 ед.	$4x+5y-12z=0$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{1}$

Тема 4. Комбинаторика

1) У Ирины пять подруг: Вера, Зоя, Марина, Полина и Светлана. Она решила пригласить двух из них в кино. Укажите все возможные варианты выбора подруг. Сколько таких вариантов? 9

2) Стадион имеет четыре входа: A, B, C и D. Укажите все возможные способы, какими посетитель может войти через один вход, а выйти через другой. Сколько таких способов?

3) В школе проводятся соревнования по хоккею. В качестве призов решили использовать мячи, ракетки, клюшки и шайбы. Сколько различных призов можно составить из этих предметов, если каждый победитель получит по два различных предмета?

4) В палатке имеется три сорта мороженого: рожок, брикет и эскимо. Наташа и Данил решили купить по одной порции. Сколько вариантов такой покупки? Решите задачу двумя способами.

5) В кафе предлагают два первых блюда: борщ, рассольник — и четыре вторых блюда: гуляш, котлеты, сосиски, пельмени. Укажите все обеды из двух блюд, которые может заказать посетитель. Проиллюстрируйте ответ, построив дерево возможных вариантов.
6) Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 6, 7, 9?

7) В цветочный магазин привезли 25 роз, 45 гвоздик и 30 лилий. Сколькими способами он может выбрать розу или гвоздику?

8) В магазине «Все для чая» имеются в продаже шесть видов разных чашек, пять видов блюдец и три вида ложек. Сколькими способами можно составить набор из трех предметов?

9) На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться и спуститься с нее, при условии, что спуск и подъем происходят по разным дорогам?

10) Номер машины состоит из трех букв русского алфавита и трех цифр. Сколько можно составить различных номеров автомашин?

11) За столом пять мест. Сколькими способами можно рассадить пятерых гостей?

12) Рекламный агент составляет эскиз для фасада центрального офиса. Ему заказали оформить его полосами, используя красный, розовый, белый и малиновый цвета. Сколькими способами это можно сделать?

13) Сколько слов получится при перестановке букв в слове: «толпа»?

14) Сколько слов получится при перестановке букв в слове: «топот»?

15) Сколько слов получится при перестановке букв в слове: «Миссисипи»?

16) Сколько слов получится при перестановке букв в слове: «колобок»?

17) У мамы два яблока и три груши. Каждый день в течение пяти дней она дает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

18) Сколько существует перестановок букв слова «конус», в которых буквы к, о, н стоят рядом?

19) Сколько шестизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр: 1, 2, 5, 6, 7, 8;

20) Сколько шестизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр: 0, 2, 5, 6, 7, 8?

21) Что больше и во сколько раз: $6!*5$ или $5!*6$?

22) Что больше и во сколько раз: $(n+1)!*n$ или $n!*(n+1)$?

23) Сколькими способами 6 студентов, сдающих экзамен, могут занять места в аудитории, в которой стоит 20 одноместных столов?

24) Сколько четырехзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр: 1, 3, 5, 7, 9?

25) Сколько четырехзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр: 0,2,4,6,8?

26) Сколько существует пятизначных номеров, не содержащих цифру 8?

27) Сколько существует пятизначных номеров, не содержащих 0 и 8?

28) Сколько существует пятизначных номеров, составленных из цифр 2, 3, 5, 7?

29) Учащиеся второго класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета?

30) На железнодорожной станции имеется 5 светофоров. Сколько можно дать различных комбинаций сигналов, если светофор имеет три состояния: красный, желтый, зеленый?

31) Алфавит племени Тумбо-Друт состоит из букв А, У и С. Словом является любая последовательность, состоящая из 4 букв. Сколько слов в языке племени Тумбо-Друт?

32) Опять восьмерка!» – горестно воскликнул председатель клуба велосипедистов, взглянув на погнутое колесо своего велосипеда, и продолжим: «А все потому, что при вступлении в клуб мне выдали билет за номером 008. И теперь не проходит и месяца, чтобы то на одном, то на другом колесе не появилась восьмерка. Надо поменять номер билета». Чтобы председателя не обвинили в суеверии, он решил объявить полную перерегистрацию всех членов клуба и выдавать только билеты с номерами, не содержащими цифру 8. Сколько членов было в клубе, если известно, что использованы все трехзначные номера, не содержащие ни одной восьмерки?

33) Номер машины в некотором городе состоит из двух различных букв, взятых из набора м, н, к, т, с, и трёх различных цифр. Сколько машин может быть обеспечено такими номерами?

34) На выборах победили 9 человек - Сафонов, Николаев, Петров, Кулаков, Мишин, Гусев, Володин, Афонин, Титов. Из них нужно выбрать председателя, заместителя и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

35) Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами можно поставить им оценки, если никому не поставили двойки?

36) В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?

37) На полке стоит 12 книг: англо-русский словарь и 11 художественных произведений на английском языке. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги, если ему обязательно нужен словарь?

38) На полке стоит 12 книг: англо-русский словарь и 11 художественных произведений на английском языке. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги, если словарь ему не нужен?

39) Сколько хорд можно провести через шесть точек, лежащих на одной окружности?

40) В почтовом отделении продают открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток?

41) В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории требуется выделить четырех мальчиков и трех девочек. Сколькими способами это можно сделать?

42) У профессора есть три любимых каверзных вопроса. В группе 20 студентов. Профессор решил задавать каждому из студентов по одному из каверзных вопросов. Сколько есть возможностей провести опрос в группе?

43) У профессора есть три любимых каверзных вопроса. В группе 20 студентов. Профессор решил наудачу по списку группы выбрать студента, чтобы задать ему первый вопрос, потом из всего списка выбрать второго студента, чтобы задать ему второй вопрос, потом также выбрать третьего студента. Сколько есть возможностей провести опрос в группе?

44) У профессора есть три любимых каверзных вопроса. В группе 20 студентов. Профессор решил спрашивать только троих студентов, каждому по одному вопросу (так, чтобы вопросы не повторялись). Сколько есть возможностей провести опрос в группе?

45) Пете на день рождения подарили 7 новых дисков с играми, а Вале папа привез 9 дисков из командировки. Сколькими способами они могут обменять 4 любых диска одного на 4 диска другого?

46) В ювелирную мастерскую привезли 6 изумрудов, 9 алмазов и 7 сапфиров. Ювелиру заказали браслет, в котором 3 изумруда, 5 алмазов и 2 сапфиров. Сколькими способами он может выбрать камни на браслет?

47) У Пети в кармане есть 8 монет, из которых 6 монет по рублю и 2 монеты по 10 рублей. Петя перекладывает какие-то три монеты в другой карман. Сколькими способами Петя может это сделать, если известно, что обе монеты по 10 рублей оказались в другом кармане?

48) Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе должны быть различными?

49) Сколькими способами из 8 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 4 различных уроков.

50) В теннисном турнире участвуют 10 спортсменов. Сколькими способами теннисисты могут завоевать золото, серебро и бронзу?

Ответы

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
10	12	6	9	8	15	70	90	20	35937000
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
120	24	120	30	2520	420	10	364	720	600
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
в 5 раз	в n раз	27907200	120	96	52488	32768	1024	1680	243
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
81	729	14400	504	81	21	55	165	15	293930
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
400400	3^{20}	6840	1140	4410	52920	6	30	1680	720

Тема 5. Координаты и векторы

1) Найдите координаты вектора AB, если A (5; –1; 3), B (2; –2; 4).

2) Даны векторы b {3; 1; –2} и c {1; 4; –3}. Найдите |2b – c|.

3) Найти расстояние от точки A(1; –2; –4) до координатных плоскостей.

4) Найдите координаты вектора CD, если C (6; 3; –2), D (2; 4; –5).

5) Даны векторы a {5; –1; 2} и b {3; 2; –4}. Найти: |a – 2b|.

6) Найти расстояние от точки B (–2; –3; 4) до координатных плоскостей.

7) Найти длину вектора, заданного своими координатами в ПДСК $\{-2; 1; 1\}$.

8) Найти длину вектора, заданного своими координатами в ПДСК $\{\sqrt{7}; -3; 3\}$

9) Найти длину вектора, заданного своими координатами в ПДСК $\{-6; -2; 3\}$.

10) Найти длину вектора, заданного своими координатами в ПДСК $\{5; -5; 5\}$.

11) Найти длину вектора, заданного своими координатами в ПДСК $\{6; 7; 5\}$.

12) Даны векторы $\bar{a} = \{2; -3; 1\}$, $\bar{b} = \{0; 1; 0\}$, $\bar{c} = \{2; 5; -3\}$. Найти длину вектора $\bar{a} + \bar{b}$;

13) Даны векторы $\bar{a} = \{2; -3; 1\}$, $\bar{b} = \{0; 1; 0\}$, $\bar{c} = \{2; 5; -3\}$. Найти длину вектора $\bar{b} + \bar{c}$;

14) Даны векторы $\bar{a} = \{2; -3; 1\}$, $\bar{b} = \{0; 1; 0\}$, $\bar{c} = \{2; 5; -3\}$. Найти длину $2\bar{a} + 3\bar{b} - \bar{c}$.

15) Три некомпланарных вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ попарно ортогональны, а их длины соответственно равны 2, 3 и 6. Найти длину вектора $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$

16) Дано: $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$, $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{3}$. Найти модуль вектора $\bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$.

17) Дано: $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 5$, $\varphi = (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = (\widehat{\bar{b},\bar{c}}) = \frac{\pi}{3}$, векторы вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны. Найти модуль вектора $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$.

18) Даны три вектора $\bar{a} = \{5; -5; 1\}$, $\bar{b} = \{-4; 3; 0\}$, $\bar{c} = \{5; -8; 10\}$. Вычислить $3\bar{a}^2 - 4(\bar{a} \cdot \bar{b}) + 2\bar{c}^2$.

19) Даны три вектора $\bar{a} = \{5; -5; 1\}$, $\bar{b} = \{-4; 3; 0\}$, $\bar{c} = \{5; -8; 10\}$. Вычислить $2\bar{a}^2 + 4\bar{b}^2 - 5\bar{c}^2$.

20) Даны три вектора $\bar{a} = \{5; -5; 1\}$, $\bar{b} = \{-4; 3; 0\}$, $\bar{c} = \{5; -8; 10\}$. Вычислить $3(\bar{a} \cdot \bar{b}) - 4(\bar{a} \cdot \bar{c}) - 5(\bar{b} \cdot \bar{c})$.

21) Даны три вектора $\bar{a} = \{3; 1; 2\}$, $\bar{b} = \{2; 7; 4\}$, $\bar{c} = \{1; 2; 1\}$. Найти $(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}$.

22) Даны три вектора $\bar{a} = \{3; 1; 2\}$, $\bar{b} = \{2; 7; 4\}$, $\bar{c} = \{1; 2; 1\}$. Найти $\bar{a}^2 \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c})$

23) Даны три вектора $\bar{a} = \{3; 1; 2\}$, $\bar{b} = \{2; 7; 4\}$, $\bar{c} = \{1; 2; 1\}$.
Найти $\bar{a}^2 \cdot \bar{b} + \bar{b}^2 \cdot \bar{c} + \bar{c}^2 \cdot \bar{a}$

24) Найти векторное произведение векторов $\bar{a} = \{-1; 2; -3\}$, $\bar{b} = \{0; -4; 1\}$,

Ответы

1	2	3	4	5	6
{–3; –1; 1}	$\sqrt{30}$	4; 2; 1;	{–4; 1; –3}	$3\sqrt{14}$	4; 3; 2

7	8	9	10	11	12
3	5	7	$5\sqrt{3}$	$\sqrt{110}$	3

13	14	15	16	17	18
7	$\sqrt{93}$	7	$\sqrt{13}$	7	716

19	20	21	22	23	24
-721	-353	{21; 42; 21}	280	{115;242;137}	{-10;1;4}

Тема 6. Основы тригонометрии

Базовый уровень

1) Упростите выражение $\frac{6\sin^2 x}{3(1-\cos^2 x)}$.

2) Упростите выражение $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$.

3) Упростите выражение $4\sin^2\alpha - 5 + 4\cos^2\alpha$.

4) Упростите $\frac{\sin x}{2\operatorname{tg} x}$.

5) Вычислите без калькулятора $\cos^2 45^0 - \sin^2 45^0$.

6) Вычислите без калькулятора $\sin\pi - \cos 60^0$.

7) Упростите выражение $\frac{2\sin^2\alpha - 1}{1 - 2\cos^2\alpha}$.

8) Упростите выражение $\cos x + \operatorname{tg} x \cdot \sin x$.

9) Упростите $\frac{1 - \sin 2\alpha}{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2}$.

10) Упростите выражение $\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1 + \sin\alpha}$.

11) Найдите $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$, если $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

12) Найдите значение выражения 2,5sin2x, если $\cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

13) Вычислите $\frac{\cos 105^0 - \cos 15^0}{\cos 315^0}$.

14) Упростите выражение $\sin(2\alpha - \pi) + 2\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$.

15) Найдите sin 390^0.

16) Найдите значение выражения $2\sin^2\alpha + 4 - 3\cos^2\alpha$, если $4\sin^2\alpha = 1$.

17) Упростить выражение $\sin 78^0 \cdot \sin 48^0 + \cos 78^0 \cdot \cos 48^0$.

18) Упростить выражение $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(2\pi - \alpha)$.

19) Вычислить $\cos(-\pi) + \sin(-\pi) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

20) Упростить $\operatorname{ctg}(-\alpha) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(2\pi - \alpha) \cdot \sin(-\alpha)$.

21) Упростить $\sin(\alpha - 270^\circ) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) + \sin(-\alpha)$.

22) Вычислить:

а) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 870^\circ \cdot \cos 330^\circ + \sin^2(-330^\circ)$;

б) $\cos(-600^\circ) + \sin 300^\circ \cdot \operatorname{ctg} 510^\circ$;

23) Найти значение выражения $\frac{2 - 2\sin^2 x}{1 - \cos 2x} + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ при $x = \frac{3\pi}{2}$.

24) Найти значение выражения $\frac{\sin 2\alpha + \cos(\pi + \alpha)}{\sin^2\alpha + \sin(\pi + \alpha) + 1 - \cos^2\alpha}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

25) Вычислить $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, если $\sin 2\alpha = -0{,}2$.

26) Вычислить $\frac{1 + \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 - \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = -\frac{1}{2}$.

27) Найти $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = 4$.

28) Вычислить $2\sin\alpha + 3\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$.

29) Найти решение уравнения $\cos\frac{2x}{5} = 0$ принадлежащие интервалу $180^0 < x < 270^0$.

30) Решите уравнение $\sin(x - 30^0) \cdot \cos 2x = \sin(x - 30^0)$.

31) Решите уравнение $\sin x \cdot (2\sin x - \sqrt{2})$ и найдите сумму его решений на отрезке [0;4].

32) Найдите корни уравнения $\sin^2 x - \cos x = 1$ из промежутка $[0;2\pi]$.

33) Решите уравнение $\frac{\cos x}{\sin x - 1} = 0$.

34) Решите уравнение cos 5x – cos 3x = sin 4x.

35) Решите уравнение $\sin\frac{x}{2}+1=0$.

36) Решите уравнение $\sin(\pi-x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}$.

37) Решите уравнение $\sin^2 3x=\frac{3}{4}$.

38) Решите уравнение $\cos^2x + \sin x + 1 = 0$.

39) Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=0$.

40) Вычислите $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

41) Найдите значение выражения $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

42) Вычислить:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{4}\right)$; б) $\cos\left(\pi+\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$;

в) $\operatorname{arcctg}0-\operatorname{arcctg}(-1)-\operatorname{arctg}(-1)$.

43) Вычислить:

а) $\sin\left(2\arcsin\frac{12}{13}\right)$; б) $\cos\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$; в) $\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right)$;

г) $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$; д) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)$.

44) Вычислить:

а) $\arcsin\left(\sin\frac{71\pi}{4}\right)$; б) $\arccos\left(\cos\frac{35\pi}{4}\right)$; в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{29\pi}{4}\right)$.

Повышенный уровень

45) Упростить $\sin^2\alpha\cdot(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)$.

46) Упростите $\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}$.

47) Найдите значение выражения $\frac{1-\cos^2\frac{5\pi}{8}}{\sin^2 75^0-1}$.

48) Вычислить $\frac{\sin 91^0-\sin 1^0}{9\sqrt{2}\cos 46^0+\sqrt{2}\sin 44^0}$.

49) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{9}$ где $180^\circ<\alpha+\beta<360^\circ$. Найти $\alpha+\beta$.

50) Вычислите $\operatorname{ctg}585^0-2\cos1440^0+\sqrt{2}\sin1125^0$.

51) Решите уравнение $\operatorname{tg}^3x=\frac{1}{\cos^2x}-\operatorname{tg}x$.

52) Найти все решения уравнения $2\cos x+1=\frac{1}{\sin^2x}+1-\operatorname{ctg}^2x$.

53) Найдите наименьший положительный корень уравнения $4\cos 6x\cdot\cos 2x + 2\sin^2 4x - 4 = 0$.

54) Сколько корней имеет уравнение $\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)\cdot\sqrt{25-4x^2}=0$?

55) Сколько решений имеет уравнение $5\sin^2 x+\sqrt{3}\cdot\sin x\cdot\cos x+6\cos^2 x=5$ на промежутке $(-3\pi;3\pi)$?

56) Решите уравнение $(x^2-4x+1)\cdot\arccos x=0$.

57) Решите уравнение $\arcsin x^2+\arccos(2x+3)=\frac{\pi}{2}$.

58) Решите уравнение arcsin(1-cos2x)=x.

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$\sin 2\alpha$	-1	0,5cosx	0	$-0{,}5$	1	$\frac{1}{\cos x}$	1	1

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	$-1{,}5$	$-\sqrt{3}$	0	0,5	2,25	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\alpha$	-3	$\cos^2\alpha$

21	22	23	24	25	26	27	28	29
$-2\sin\alpha$	а) 0, б) 1	1	1	0,4	2	2/7	0,2	225^0

30	31	32
$30^0+180^0\cdot k_1,\ 180^0\cdot k_2,\ k_1,k_2\in Z$;	$\pi k_1;\ (-1)^{k_2}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k_2,\ k_1,k_2\in Z$; 2π;	$\frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}$

33	34	35	36
$-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$	$\frac{\pi k_1}{4},\ (-1)^{k_2+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k_2,\ k_1,k_2\in Z$	$-\pi+4\pi k,\ k\in Z$	$(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$

37	38	39	40	41	42
$\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$	$-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$	$\pi k,\ k\in Z$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	0	а) $\frac{\sqrt{15}}{4}$, б) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$; в) 0;

43	44	45	46	47	48	49	50
а) 120/169; б) –7/25; в) –7/25; г) 24/25; д) $\sqrt{\frac{22}{13}}$	а) $-\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{4}$;	$\mathrm{tg}^2\alpha$	$\sin^3\alpha$	$\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{3}-2}$	0,1	225^0	0

Тема 8. Многогранники и круглые тела

1) В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами, равными 5 и 12. Высота призмы равна 8. Найдите полную поверхность призмы.

2) В прямой треугольной призме основания равны 36, 29 и 25, а полная поверхность призмы 1620. Найдите высоту призмы.

3) В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной $12\sqrt{2}$. Диагональ боковой грани, соответствующей катету, равна 13. Найдите объем призмы.

4) Стороны основания прямой треугольной призмы равны 10, 17 и 21, а ее боковое ребро равно меньшей из высот основания. Найдите объем призмы.

5) Объем правильной треугольный призмы равен $27\sqrt{3}$. Найдите высоту призмы, если радиус описанной около основания окружности равен 2.

6) Высота правильной треугольной призмы равна 8, а площадь основания $9\sqrt{3}$. Найдите диагональ боковой грани призмы.

7) Все ребра прямой треугольной призмы равны. Найдите площадь основания призмы, если площадь ее полной поверхности равна $8+16\sqrt{3}$.

8) Высота правильной четырёхугольной призмы равна $2\sqrt{6}$, а диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найти сторону основания призмы.

9) Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 6м и 8м, а диагональ большей по площади боковой грани равна $10\sqrt{2}$ м. Найдите объём призмы.

10) Найдите площадь поверхности куба, диагональ которого равна $\sqrt{6}$.

11) Площадь диагонального сечения куба равна $16\sqrt{2}$. Найдите ребро куба.

12) Сумма длин всех ребер куба равна 48. Чему равна площадь всех его граней?

13) Если ребро куба уменьшить на 10%, на сколько процентов уменьшится его объем?

14) В прямом параллелепипеде проведено сечение через диагональ нижнего основания и середину непересекающегося с этой диагональю бокового ребра. Расстояние от плоскости сечения до вершины нижнего основания, не лежащей в плоскости сечения, равно 5см. Площадь сечения равна 10см^2. Найти объём параллелепипеда.

15) В прямом параллелепипеде проведено сечение через диагональ нижнего основания и середину непересекающегося с этой диагональю бокового ребра. Объём меньшего из двух многогранников, на которые параллелепипед делится плоскостью сечения, равен 40см^3. Найдите объём параллелепипеда.

16) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда 6м и 8м, а угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания 30^0. Найдите диагональ параллелепипеда.

17) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 4м и 3м, а угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания 45^0. Найдите длину диагонали параллелепипеда.

18) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 12, а боковое ребро $2\sqrt{6}$. Найдите градусную меру угла между плоскостями A_1BC и ABC.

19) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – призма, в основании которой лежит квадрат, боковые ребра которой наклонены к плоскости основания под углом 30^0. Диагональ AD_1 перпендикулярна плоскости основания. Площадь боковой поверхности призмы равна $24\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.

20) В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат. Боковое ребро равно $25\sqrt{6}$. Найдите длину стороны основания, если угол между плоскостью AB_1C и плоскостью основания призмы равен 30^0.

21) Ребра треугольной пирамиды длины 4, 5 и 9 взаимно перпендикулярны. Чему равен объем пирамиды?

22) Пирамида имеет 28 ребер. Сколько у нее граней?

23) Высота правильной треугольной пирамиды равна 15, а высота ее основания 12. Найдите длину бокового ребра.

24) Высота правильной треугольной пирамиды в два раза меньше стороны основания. Найдите угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью основания.

25) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 10 см. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45^0. Найдите высоту пирамиды.

26) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 10, а периметр основания 36. Найдите высоту пирамиды.

27) В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 3см, а площадь боковой поверхности 80см^2. Найти объём пирамиды.

28) Боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60^0. Площадь основания равна 14м^2. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

29) В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60^0. Сторона основания пирамиды равна 6см. Найдите объём пирамиды.

30) В правильной четырёхугольной пирамиде апофема образует с плоскостью основания угол 60^0. Высота пирамиды равна 8см. Найдите площадь поверхности пирамиды.

31) В правильной треугольной пирамиде высота равна $\sqrt{3}$, а величина двугранного угла при основании 60^0. Найдите сторону основания пирамиды.

32) В правильной треугольной пирамиде высота равна 4, а апофема равна 5. Найдите сторону основания пирамиды.

33) Высота треугольной пирамиды SABC равна 8, а площадь треугольника ABC 12. Точки A_1, B_1, C_1 делят ребра SA, SB и SC в отношении 1 : 1. Найдите объем усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$.

34) В основании пирамиды SABC лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами AC=4 и BC=3. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, тангенс которого равен 4/5. Найдите объем пирамиды.

35) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь его осевого сечения равна 12.

36) Площадь основания цилиндра равна 4, а площадь его боковой поверхности равна $12\sqrt{\pi}$. Найдите высоту цилиндра.

37) Высота и радиус основания цилиндра равны, соответственно, 9 и 6. Концы отрезка AB длины $\sqrt{113}$ лежат на окружностях верхнего и нижнего оснований. Найдите расстояние от оси цилиндра до отрезка AB.

38) Радиус основания конуса равен 6, а образующая составляет с плоскостью основания угол, равный 30^0. Найдите расстояние от центра основания до образующей.

39) Образующая конуса равна диаметру его основания. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если его высота равна $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

40) Площадь осевого сечения конуса равна 8, а радиус основания 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

41) Осевое сечение конуса – правильный треугольник со стороной $\frac{6}{\pi}$. Найдите полную поверхность конуса.

42) Из точки M вне шара проведена касательная AM к его поверхности. Кратчайшее расстояние от этой точки до поверхности шара равно 6, а до центра шара 15. Найдите длину AM.

43) Если радиус сферы увеличить на 50%, на сколько процентов увеличится площадь ее поверхности?

44) Радиус шара равен $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$. Через конец радиуса под углом 600 к нему проведена плоскость. Найти площадь сечения шара плоскостью.

45) Стороны треугольника, равные 10, 10 и 12 касаются поверхности шара Найдите радиус шара, если расстояние от центра шара до плоскости треугольника равно 4.

46) Как относятся объемы куба и описанного около него шара?

47) В шар объема 36π вписан конус, таким образом, что основанием конуса является осевое сечение шара. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Ответы

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
300	10	360	672	9	10	4	6	240м^3	12
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
2	96	27,1%	200см^3	480см^3	$\frac{29\sqrt{3}}{3}$	$5\sqrt{2}$	30^0	24	150
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
30	15	17	60	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$	$2\sqrt{13}$	64см^3	28м^2	$36\sqrt{6}$	256см^2
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
$2\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	28	4	12π	3	$2\sqrt{7}$	3	8/3	$4\sqrt{5}\pi$
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**			
$\frac{27}{\pi}$	12	125%	16	5	$1:\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$	9			

Тема 9. Начала математического анализа. Интеграл и его применение.

1. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{8-x^3}$

2. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\frac{3x^2-7x+2}{6x-2}$

3. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+3x+4}{x^2-x-2}$

4. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 1}=\frac{4x^2-5x+1}{3x^2-x-2}$

5. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$

6. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}.$

7. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}.$

8. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}.$

9. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$

10. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$.

11. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

12. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^2+3x+2\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.

Ответы

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
-1	-5/6	-2	3/5	2/3	1/12	-1/2	2/3	∞	-1/3	-1/2	0

13. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=6t^2-48t+17$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t=9$ с.

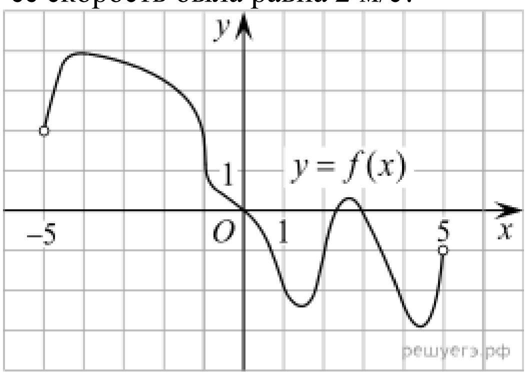
14. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\dfrac{1}{2}t^3-3t^2+2t$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t=6$ с.

15. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-t^4+6t^3+5t+23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t=3$ с.

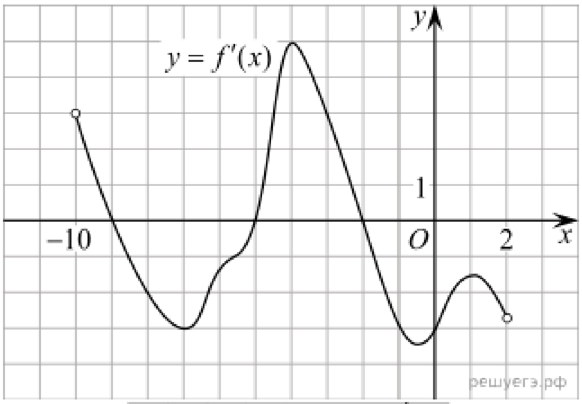
16. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2-13t+23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

17. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\dfrac{1}{3}t^3-3t^2-5t+3$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

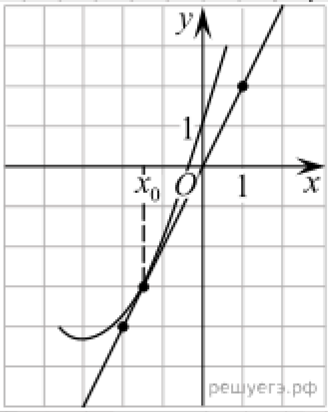
18. На рисунке изображен график функции y = f(x), определенной на интервале (−5; 5). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y = 6 или совпадает с ней.



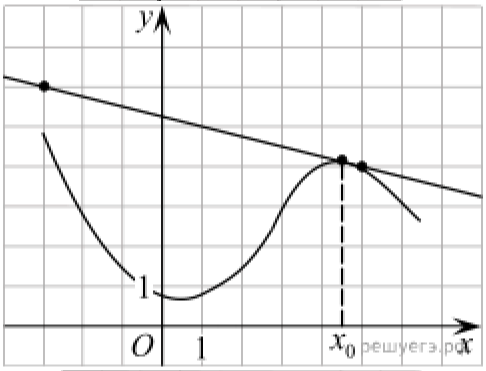
19. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−10; 2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции f(x) параллельна прямой y = −2x − 11 или совпадает с ней.



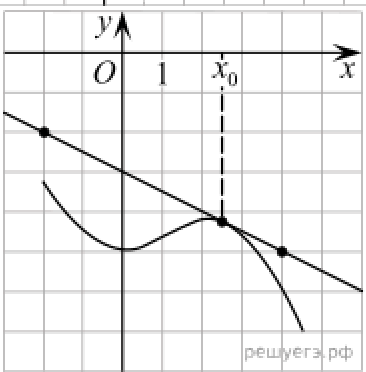
20. На рисунке изображён график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x0.



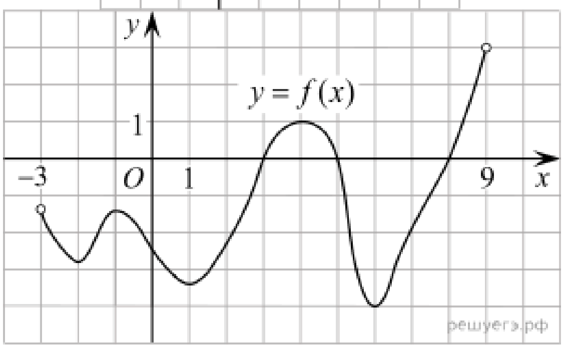
21. На рисунке изображены график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x0.



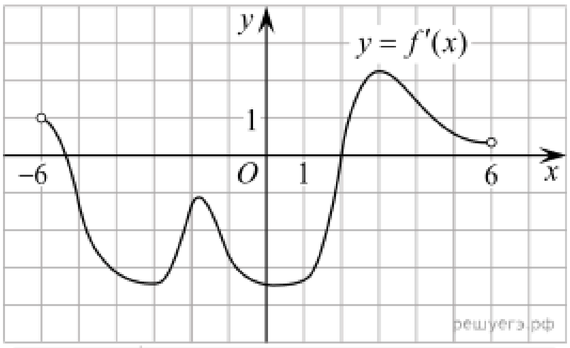
22. На рисунке изображены график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x0.



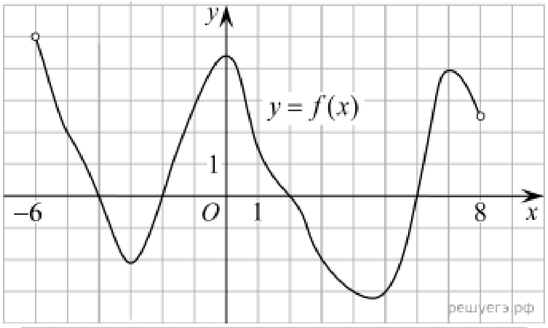
23. На рисунке изображен график функции y = f(x), определенной на интервале (−3; 9). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y = 12 или совпадает с ней.



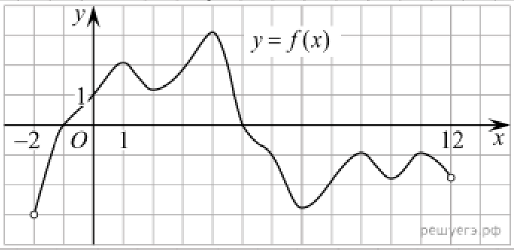
24. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



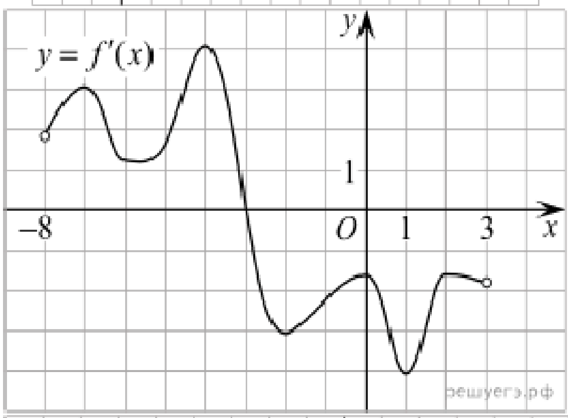
25. На рисунке изображен график функции y = f(x), определенной на интервале (−6; 8). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



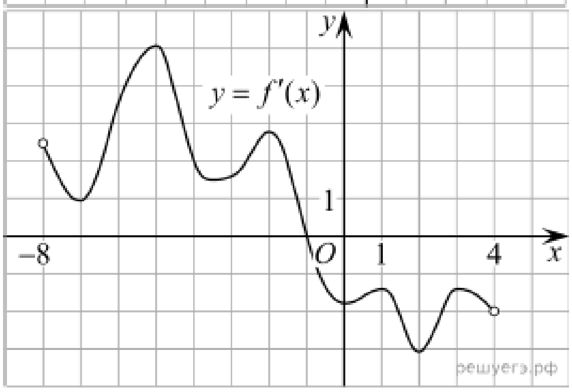
26. На рисунке изображен график функции y = f(x), определенной на интервале (−2; 12). Найдите сумму точек экстремума функции f(x).



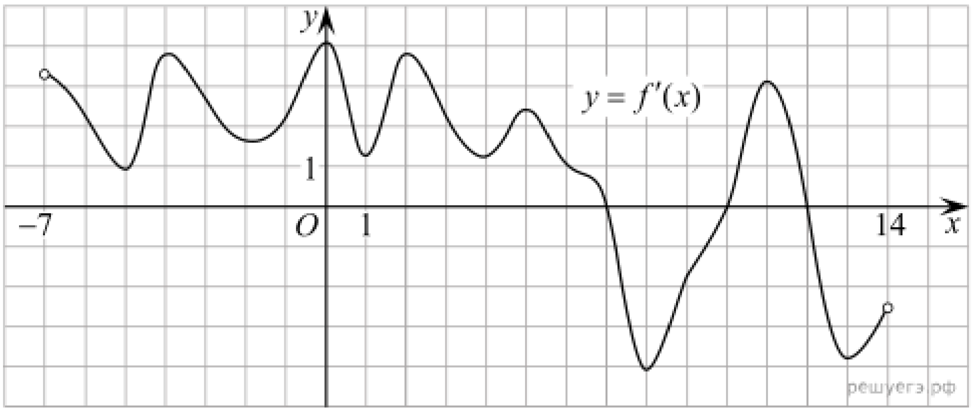
27. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−8; 3). В какой точке отрезка [−3; 2] функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



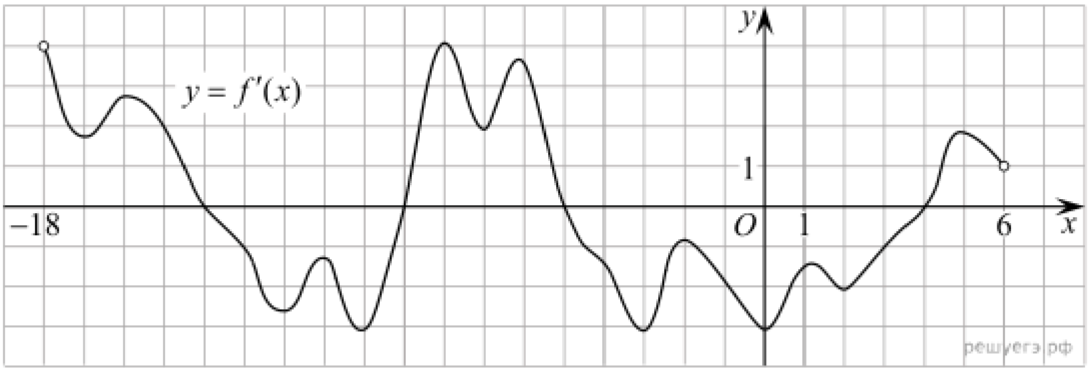
28. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−8; 4). В какой точке отрезка [−7; −3] f(x) принимает наименьшее значение?



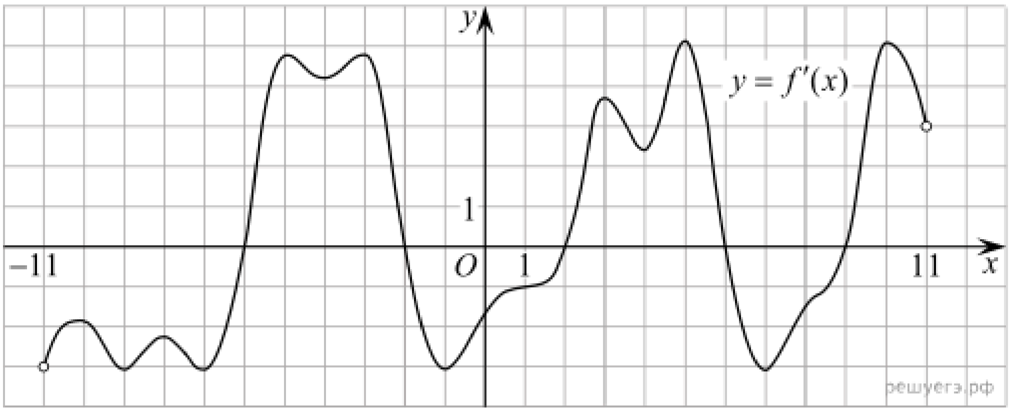
29. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−7; 14). Найдите количество точек максимума функции f(x) на отрезке [−6; 9].



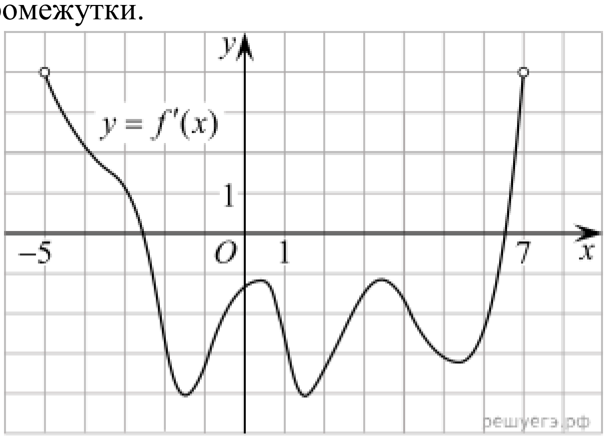
30. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−18; 6). Найдите количество точек минимума функции f(x) на отрезке [−13;1].



31. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−11; 11). Найдите количество точек экстремума функции f(x) на отрезке [−10; 10].



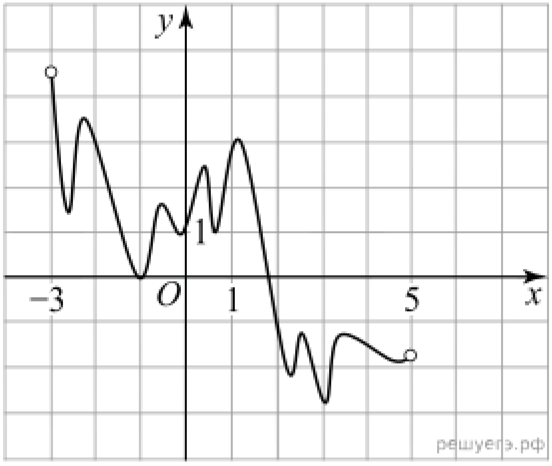
32. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−5; 7). Найдите промежутки убывания функции f(x). В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



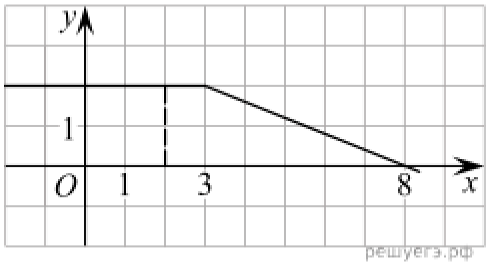
Ответы

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
60	20	59	8	7	4	5	2	-0,25	-0,5
23	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
5	14	4	44	-3	-7	1	1	5	18

33. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.

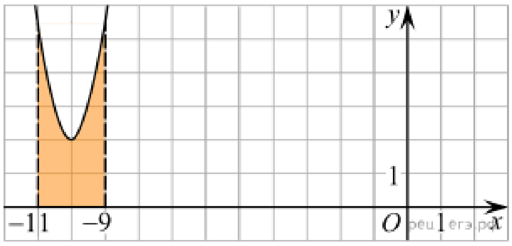


34. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



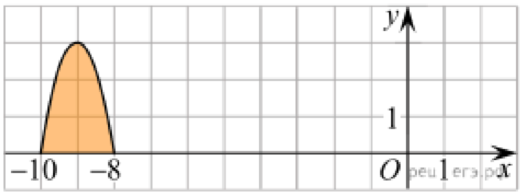
35. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция

$F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



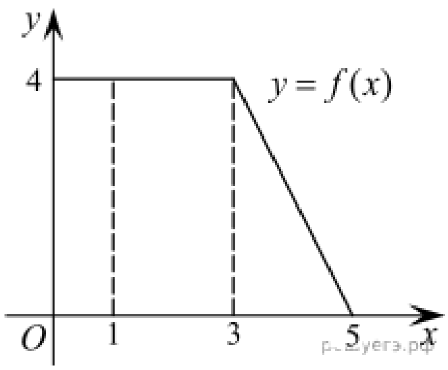
36. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция

$F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

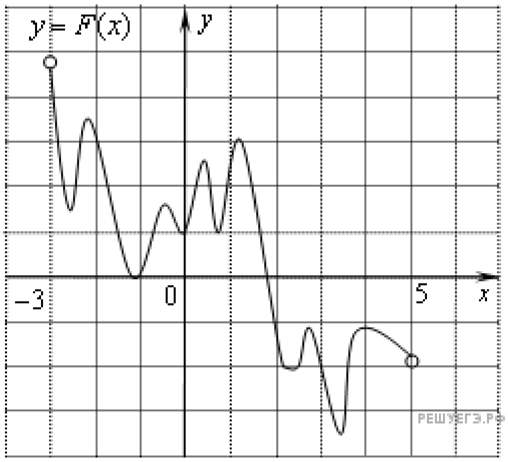


37. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

$$\int_1^5 f(x)\,dx.$$



38. На рисунке изображён график функции y = F(x) — одной из первообразных некоторой функции f(x), определённой на интервале (−3;5). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения f(x)=0 на отрезке [−2;4].



Вычислить интеграл

39.	$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$	40.	$\int \frac{x^2 + \ln x^2}{x}\,dx$
41.	$\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - \ln^2 x}}$	42.	$\int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1}\,dx$

43.	$\int xe^{-2x}dx$	44.	$\int xe^{2x}dx$
45.	$\int e^{2x}\sin x\,dx$	46.	$\int e^{2x}\cos x\,dx$

47.	$\int_0^1 (3x-2)^4 dx$	48.	$\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^2}$
49.	$\int_0^1 x(x^2+1)^3 dx$	50.	$\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^3}$

51.	$\int_0^3 \frac{xdx}{(1-x^2)}$	52.	$\int_1^e \frac{dx}{(5x-1)}$
53.	$\int_2^3 \sqrt{x-2}\ dx$	54.	$\int_1^2 x^2e^xdx$

55.	$\int_0^1 \mathrm{arctg}xdx$		

33	34	35	36	37	38	39	40
10	7	6	4	12	10	$\frac{\ln^2 x}{2}+C$	$\frac{\ln^3 x}{3}+\frac{x^2}{2}+C$

41	42	43	44
$arcsin\left(\frac{\ln x}{2}\right)+C$	$\frac{(\ln(x-1)+1)^2}{2}+C$	$-\frac{(2x-1)e^{-2x}}{4}+C$	$\frac{(2x-1)e^{2x}}{4}+C$

45	46	47	48
$\frac{e^{2x}(2\sin x-\cos x)}{5}+C$	$\frac{e^{2x}(2\sin x+2\cos x)}{5}+C$	$\frac{(3x-2)^5}{15}+C$ $\frac{11}{5}$	$\frac{\arctan(x\sqrt{3})}{\sqrt{3}}+C$ $\frac{\pi}{\sqrt{3^3}}$

49	50	51	52
$\frac{(x^2+1)^4}{8}+C$ $\frac{15}{8}$	$-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$ $\frac{3}{8}$	$-\frac{\ln(\lvert x^2-1\rvert)}{2}+C$ $-\frac{\ln 8}{2}$	$\frac{\ln(\lvert 5x-1\rvert)}{5}+C$ $\frac{\ln(5e-1)}{5}$

53	54	55
$\frac{2\sqrt{(x-2)^3}}{3}+C$ $\frac{2}{3}$	$(x^2-2x+2)e^x+C$ $2e^2-e$	$x\cdot arctg\,x-\frac{\ln(x^2+1)}{2}+C$ $-\frac{2\ln 2-\pi}{4}$

Тема 10. Элементы теории вероятностей и математической статистики

1. При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 9 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 5 очков?
2. Игральную кость бросили два раза. Известно, что три очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 8».
3. Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

4. В городе 48% взрослого населения — мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

5. В коробке 8 синих, 6 красных и 11 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

6. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

7. Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.

8. Шесть шаров случайным образом раскладывают в три ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.

9. На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

10. Шесть рукописей случайно раскладывают по пяти папкам. Какова вероятность того, что ровно одна папка останется пустой?

11. Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.

12. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.

13. На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: "а", "м", "р", "т", "ю". Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной карточке можно прочесть слово "юрта".

14. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

15. В пачке 20 перфокарт, помеченных номерами 101, 102, ... , 120 и произвольно расположенных. Перфораторщица наудачу извлекает две карты. Найти вероятность того, что извлечены перфокарты с номерами 101 и 120.

16. Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов (от 1 до 5)?

17. Случайно выбранная кость в игре домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую также взятую наудачу кость домино можно приставить к первой.

18. Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит N; б) произведение числа очков не превосходит N; в) произведение числа очков делится на N. N=8

19. Из n аккумуляторов за год хранения k выходит из строя. Наудачу выбирают m аккумуляторов. Определить вероятность того, что среди них l исправных. n=100,k=7,m=5,l=3.

20. Устройство, состоящее из пяти независимо работающих элементов, включается за время Т. Вероятность отказа каждого из них за это время равна 0,2. Найти вероятность того, что откажут:

а) три элемента;

б) не менее четырех элементов;

в) хотя бы один элемент.

21. Сколько следует сыграть партий в шахматы с вероятностью победы в одной партии, равной 1/3, чтобы наивероятнейшее число побед было равно 5?

22. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 6 телевизоров: а) не более одного потребует ремонта; б) хотя бы один не потребует ремонта.

23. а) Найти вероятность того, что событие А появится не менее трех раз в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события А в одном испытании равна 0,4; б) событие В появится в случае, если событие А наступит не менее четырех раз. Найти вероятность наступления события В, если будет произведено пять независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,8.

24. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе - 0,9, в третье - 0,8. Найти вероятность следующих событий:
а) только одно отделение получит газеты вовремя;
б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

25. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

26. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при трех выстрелах равна 0,973. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

27. В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

28. Трое учащихся на экзамене независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятности ее решения этими учащимися равны 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Найдите вероятность того, что хотя бы один учащийся решит задачу.

29. Брошены две игральные кости. Событие A={выпадение шестерки на первой кости}. Событие B={сумма выпавших очков равна 7}. Являются ли события А и В независимыми?

30. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

31. На фирме работают 8 аудиторов, из которых 3 – высокой квалификации, и 5 программистов, из которых 2 высокой квалификации. В командировку надо отправить группу из 3 аудиторов и 2 программистов. Какова вероятность того, что в этой группе окажется по крайней мере 1 аудитор высокой квалификации и хотя бы один программист высокой квалификации, если набор группы проводился анонимным анкетированием и каждый специалист имел равные возможности поехать в командировку?

32. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

33. Два игрока А и В поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадет герб. Первый бросок делает игрок А, второй – В, третий – А и т.д. 1. Найти вероятность того, что А выиграл до k броска. 2. Каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре? k=9.

34. Из 1000 ламп 380 принадлежат к 1 партии, 270 – ко второй партии, остальные к третьей. В первой партии 4% брака, во второй - 3%, в третьей – 6%. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа – бракованная.

35. Сотрудники отдела маркетинга полагают, что в ближайшее время ожидается рост спроса на продукцию фирмы. Вероятность этого они оценивают в 80%. Консультационная фирма, занимающаяся прогнозом рыночной ситуации, подтвердила предположение о росте спроса. Положительные прогнозы консультационной фирмы сбываются с вероятностью 95%, а отрицательные – с вероятностью 99%. Какова вероятность того, что рост спроса действительно произойдет?

36. В группе спортсменов лыжников в 2 раза больше, чем бегунов, а бегунов в 3 раза больше, чем велосипедистов. Вероятность выполнить норму для лыжника 0,9, для бегуна 0,75, для велосипедиста - 0,8. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнит норму.

37. В двух урнах находится соответственно 4 и 5 белых, и 6 и 3 чёрных шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар, а затем из этих двух наудачу берется один. Какова вероятность, что это будет белый шар?

38. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей – на заводе №2 и 18 деталей – на заводе №3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах №2 и №3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

39. В ящике находятся 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

40. В альбоме k чистых и l гашеных марок. Из них наудачу извлекаются m марок (среди которых могут быть и чистые, и гашеные), подвергаются спецгашению и возвращаются в альбом. После этого вновь наудачу извлекается n марок. Определить вероятность того, что все n марок чистые. k=11; l=8; m=2; n=5

41. Два автомата производят детали. Вероятность изготовления стандартной детали первым автоматом равна 0,8, вторым — 0,9. Производительность первого автомата впятеро выше производительности второго. Рабочий взял наугад деталь, и она оказалась стандартной. Какова вероятность, что эта деталь изготовлена вторым автоматом?

42. Есть 4 кубика. На трех из них окрашена белым половина граней, а на четвертом кубике всего одна грань из шести белая. Наудачу выбранный кубик подбрасывается семь раз. Найти вероятность того, что был выбран четвертый кубик, если при семи подбрасываниях белая грань выпала ровно один раз.

43. На пути движения автомашины 4 светофора, каждый из которых запрещает дальнейшее движение автомашины с вероятностью 0,5. Найти ряд распределения числа светофоров, пройденных машиной до первой остановки. Чему равны математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины?

44. Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Составить закон распределения числа промахов, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Найти математическое ожидание дисперсию этой случайной величины.

45. На переэкзаменовку по теории вероятностей явились 3 студента. Вероятность того, что первый сдаст экзамен, равна 0,8, второй - 0,7, третий - 0,9. Найдите ряд распределения случайной величины ξ числа студентов, сдавших экзамен, постройте график функции распределения, найдите $M(\xi)$, $D(\xi)$.

46. Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число гербов на обеих верхних сторонах монет. Рассматривается дискретная случайная величина X - число выпадений гербов на обеих монетах. Записать закон распределения случайной величины X , найти ее математическое ожидание.

47. Бросают 4 игральные кости. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые выпадут на всех гранях.

48. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 1,06 кг. Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 1 кг. Каков процент коробок, масса которых превышает 940 г?

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,5	0,12	0,6	0,1	0,16	0,3	1/18	0,6	7/9	5/21	4/9, 0	1/6

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1/120	1/60	0,0053	0,0083	0,444	36	0,0394	0,0512; 0,00672; 0,67232	14, 15, 16, 17	0,655; 0,9999	0,1792, 0,737	0,032; 0,316

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
0,14	0,7	0,184	0,976	нет	0,8	0,575	0,251	0,6667; 2/3; 1/3	0,0443	0,958	0,845

37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
0,513	0,78	0,089	0,021	0.184	0.7042	0,9375 1, 434	0,4251 0,581	2,4 0,46	1	14	0,9995

Тема 11. Уравнения и неравенства

Базовый уровень

Целые неравенства и системы неравенств

1) Решите неравенство $2x - 5 \le 3 + x$.

2) Решите неравенство $-5x > 0{,}25$.

3) Решите неравенство $-9x \le -45$.

4) Решите неравенство $2 - 5x \ge -3x$.

5) Решите неравенство $x + 2 < 5x - 2(x - 3)$.

6) Решите неравенство $3(3x-1) > 2(5x-7)$.

7) Решите неравенство $(x - 3)(x + 2) > 0$.

8) Решить систему неравенств $\begin{cases} 3x \le 0, \\ 2 + x > 0 \end{cases}$

9) Найдите целочисленные решения системы неравенств $\begin{cases} -2 - 5x > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases}$.

10) Решить систему неравенств $\begin{cases} 2x + 7 \le 4x - 8 \\ 10 + 4x \ge 0 \end{cases}$.

11) Решить систему неравенств $\begin{cases} 3(x-1) - 2(1+x) < 0, \\ 3x - 4 > 0. \end{cases}$

12) Найти наименьшее целое решение неравенства $\begin{cases} \dfrac{x}{6} + \dfrac{2}{3}(x-7) < \dfrac{3x-20}{9}, \\ 3x - \dfrac{2x-13}{11} > 2. \end{cases}$

13) Решите неравенство $\dfrac{7-9x}{3} \ge 1$.

14) Решите неравенство $\dfrac{2x-1}{4} + \dfrac{x+3}{3} \le 0$.

15) Решите неравенство $\dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x+3}{2} < 0$.

16) Решите неравенство $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} < 4$.

17) Найдите решение неравенства $x^2 - 1\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} < 0$, принадлежащие промежутку $\left[-1; -\frac{1}{4}\right]$.

18) Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2 > 4, \\ 2x - 5 < 0 \end{cases}$

19) Найти все целые решения системы $\begin{cases} 5x - x^2 \ge 0, \\ \frac{x}{3} - 2x < -4 \end{cases}$

Рациональные неравенства и системы неравенств

20) Решите неравенство $\frac{x-2}{x} < 0$.

21) Решите неравенство $\frac{1}{x} > \frac{2}{3}$.

22) Определите число целых решений неравенства $\frac{3x+3}{2-x} \ge 0$.

23) Определите число целых решений неравенства $\frac{8-x}{7x-14} \ge 0$.

24) Решите неравенство $\frac{2x-3}{x+1} < 0$.

25) Решите неравенство $2^x < 16$.

26) Решите неравенство $\frac{4}{x} < \frac{1}{4}$.

27) Решите неравенство $\frac{4}{x+3} > \frac{1}{5}$.

28) Решите неравенство $3 + \frac{4}{x+2} > \frac{3}{x}$.

29) Найдите сумму целых решений неравенства $x - 11 + \frac{64}{x+5} \le 0$ на отрезке [– 7, 7].

30) Решите неравенство $\frac{1}{2x} \le \frac{1}{x}$.

31) Решите неравенство $\frac{(7-x)(6-x)}{x+1} \le 0$.

Иррациональные неравенства

32) Решите неравенство $\sqrt{x-1} < 4$.

33) Решите неравенство $\sqrt{x-1} > 4$

34) Решите неравенство $\sqrt{2x-3} - 3 + x \ge 0$.

Показательные, логарифмические неравенства и системы неравенств

35) Решите неравенство $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3x} > \sqrt{2}$.

36) Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} < 4$.

37) Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} < 3$.

38) Решите неравенство $\left(\frac{7}{5}\right)^{2x-7} \le \left(\frac{7}{5}\right)^{2-x}$.

39) Решите неравенство $10^{\frac{2x}{7}} > 0{,}1$.

40) Решите неравенство $49 \cdot 7^{x} < 7^{3x+3}$.

41) Найдите все целые решения неравенства $\frac{1}{27} \le 3^{2-x} < 27$.

42) Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$.

43) Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{5+x} \le 81^{-x}$.

44) Решите неравенство $7^{x+1}-7^{x}<42$.

45) Решите неравенство $\log_3(2x^2+x-1)>\log_3 2$.

46) Решите неравенство $\log_{0,5}(2x+3)>0$.

47) Решите неравенство $\log_{0,5}\frac{x}{x-1} > \log_2 1$.

48) Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(20-x) \le \log_{\frac{1}{3}}\left(2\,(x+1)^2\right)$.

49) Решите неравенство $\log_{x+1}\frac{3x}{5x-8} > 1$.

50) Решите неравенство $\log_{x+1}12>\log_{x+1}2$.

51) Решите неравенство $\log_x 9<2$.

52) Решите неравенство $\log_x^2\left(5^{\sqrt{2}}\right) - \log_x 5 \ge 0$.

Повышенный уровень

53) Решите неравенство $|x-3|>2x$.

54) Решите неравенство $2\,|x + 1| > x + 4$.

55) Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{4^x+3\cdot 2^x-4}{x^2+x+3} < 0$.

56) Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2+x-1 \ge -1-4x-x^2 \\ |x| < 6. \end{cases}$

57) Решить систему неравенств $\begin{cases} |x+5| < 12, \\ \sqrt{x+3} \ge \sqrt{10-x} \end{cases}$.

58) Решите неравенство $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_2\frac{x+1}{x}} < \frac{1}{7}$.

59) Решите неравенство $25 \cdot 2^{x}-10^{x}+5^{x}>25$.

60) Решите неравенство $\log_{\frac{1}{x^2-2x-1}} \log_2 4^{\frac{1}{x}} \le 1$.

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x≤8	x<–0,05	x≥5	x≤1	x>–2	x<11	$(-\infty;\ -2)\cup(3;\ +\infty)$	(-2;0]	– 1	x≥7,5

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\left(\frac{4}{3};\ 5\right)$	1	$\left(-\infty;\ \frac{4}{9}\right]$	x≤–0,9	x<–1	x<24	$\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{4}\right]$	$(-\infty;\ -2)\cup(2;\ 2{,}5)$	3,4,5;	(0;2)

21	22	23	24	25	26	27	28
(0;1,5)	3	6	(–1;1,5)	x<4	$(-\infty;0)\cup(16;+\infty)$	(–3;17)	$(-\infty;-3)\cup(-2;0)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$

29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
–10	(0;+∞)	$(-\infty;-1)\cup[6;\ 7]$	[1;17)	x>17	x ≥ 2	$x>\frac{1}{12}$	x < 2	x > 0	x ≤ 3

39	40	41	42	43	44	45	46
x>–3,5	x>–0,5	0, 1, 2, 3, 4, 5	x < 3	$x\le\frac{5}{3}$	x < 1	$(-\infty;\ -1{,}5)\cup(1;\ +\infty)$	(– 1,5; – 1)

47	48	49	50	51	52
x<0	$[-4{,}5;\ -1)\cup(-1;\ 2]$	$(-0{,}8;0)\cup(1{,}6;\ 2)$	x>0	$(0;\ 1)\cup(3;+\infty)$	$(0;\ 1)\cup(1;\ 25]$

53	54	55	56	57	58	59	60
x<1	$(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$	–1	$\left(-6;-\frac{5}{2}\right]\cup[0;\ 6)$	[3,5;10]	(0,1)	(0;2)	$\left[\frac{1}{2};1\right)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$

3. КОМПЛЕКТ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ для промежуточного контроля успеваемости по общеобразовательной дисциплине ОУД.07 Математика

3.1 Пояснительная записка

Комплект контрольно-оценочных средств (КОС) для проведения промежуточной аттестации предназначен для проверки результатов освоения учебной дисциплины ОУД.07 Математика. Промежуточная аттестация по дисциплине завершает освоение обучающимися программы дисциплины и осуществляется в форме экзамена.

Результаты обучения по дисциплине: знания и умения, подлежащие контролю при проведении промежуточной аттестации:

Освоенные умения, усвоенные знания	Показатели оценки результата	№№ задания для проверки
– сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке;	Выбор правильного ответа	Тесты по темам «Введение», «Развитие понятия о числе»
– сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;		Тесты по темам «Введение», «Развитие понятия о числе»
– владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;		Задачи по темам «Корни, степени и логарифмы», «Основы тригонометрии», «Уравнения и неравенства»
– владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;		Задачи по темам «Корни, степени и логарифмы», «Основы тригонометрии»
– сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;		Расчетно-графическая работа, Задачи по теме «Начала математического анализа. Интеграл и его применение.»
– владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения		Задачи по темам «Прямые и плоскости в пространстве»,

распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;		«Координаты и векторы», «Многогранники и круглые тела»
– сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;		Задачи по темам «Комбинаторика», «Элементы теории вероятностей и математической статистики»
– владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.		Расчетно-графическая работа в электронных таблицах

Время на выполнение: выполнение 120 минут
Дополнительные материалы и оборудование: не используются.

3.2 Оценочные средства промежуточного контроля по ОУД.07 Математика

Критерии оценивания

81-100 % верно выполненных заданий – «*отлично*»
67-80 % верно выполненных заданий – «*хорошо*»
51-66 % верно выполненных заданий – «*удовлетворительно*»
50 % и менее верно выполненных заданий – «*неудовлетворительно*»

Контрольная работа за I полугодиепо темам 1-6

Вариант 1

1. Упростить

$$\frac{m-2\sqrt{mn}+n}{m-n}$$

2. Упростить

$$\overline{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}}$$

3. Вычислить

$$\frac{24^2}{2^6\cdot 3^3}:\frac{20^4}{2^7\cdot 5^8}$$

4. Упростить

$$(x^{0,6})^{\frac{1}{3}}\cdot x^{0,5}\cdot x^{2,3}$$

5. Вычислить $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$

6. Вычислить $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{0{,}09}$

7. Выполнить действия

$$4\log_{15} 2-\log_{15} 240$$

8. Найти значение

$$2^{3\log_4 9-\log_4 49}$$

9. Вычислить $\log_{\frac{1}{3}}\log_4 64$

10. Площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью ACD_1 равна $12{,}5\sqrt{3}$ см^2. Найдите:

а) диагональ куба;

б) площадь сечения куба плоскостью ABC_1.

11. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AA_1=4$, а $AB=BC=2$. Вычислите косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$.

12. В вазе лежат яблоки: 10 зеленых и 5 красных. Сколькими способами можно взять из вазы 3 зеленых и 2 красных яблока?

Ответы

1	2	3	4	5	6
$\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$	$\sqrt[36]{x^{31}}$	60000	x^3	-1,5	-2/3
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
-1	$3^{\frac{6}{7}}$	-1	$5\sqrt{3}$ см, $25\sqrt{2}$ см^2	0,8	1200

Вариант 2

1. Упростить

$$\frac{x-4\sqrt{xy}+4y}{x-4y}$$

2. Упростить

$$\sqrt{\sqrt[5]{x^4}\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt[4]{x^{-11}}}}$$

3. Вычислить

$$\frac{3^5\cdot 5^7}{15^7\cdot 2^8}\cdot\frac{22^9\cdot 3^{12}}{11^8\cdot 9^4}$$

4. Упростить

$$\frac{x^{\frac{9}{5}}}{x^{\frac{7}{10}}\cdot x^{\frac{4}{15}}}$$

5. Вычислить $\log_{13}\sqrt[5]{169}$

6. Вычислить $\log_9(\log_4\sqrt[3]{4})$

7. Выполнить действия

$$5\log_{20}2-\log_{20}640$$

8. Найти значение

$$4^{4\log_{16}3-3\log_{16}5}$$

9. Вычислить $\log_{25}\log_3\sqrt[5]{3}$

10. Площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью ABC_1 равна $81\sqrt{2}$ см^2. Найдите:

а) диагональ куба

б) площадь сечения куба плоскостью ACD_1.

11. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AA_1=6$, а $AB=BC=3$. Вычислите косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$.

12. В вазе лежат яблоки: 12 желтых и 6 красных. Сколькими способами можно взять из вазы 4 желтых и 2 красных яблока?

Ответы

1	2	3	4	5	6
$\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$	$\sqrt[4]{x^3}$	198	$x^{\frac{5}{6}}$	0,4	-0,5

7	8	9	10	11	12
-1	$\sqrt[9]{5}\,5\sqrt{5}$	-0,5	$9\sqrt{3}$ см, $40,5\sqrt{3}$ см^2	0,8	7425

Вариант 3

1. Упростить

$$\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$$

2. Упростить

$$\sqrt[6]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[5]{x}}}$$

3. Вычислить

$$\frac{9^6\cdot 4^3}{27^4\cdot 2^5}$$

4. Упростить

$$\frac{x^{6,2}\cdot\sqrt[5]{y^{14}}}{(y^{-0,4}\cdot x^{0,4})^3}$$

5. Вычислить $\log_{4\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{32}$

6. Вычислить

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[5]{2}}}\frac{1}{4}$$

7. Выполнить действия

$$\log_{15}5+\log_{15}45$$

8. Найти значение

$$81^{0,25-\log_9 5}$$

9. Вычислить $\log_{16}\log_{2,5}6\frac{1}{4}$

10. Площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью ACD_1 равна $18\sqrt{3}$ см^2. Найдите:

а) диагональ куба;

б) площадь сечения куба плоскостью ABC_1.

11. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AA_1=4$, а $AB=BC=2$. Вычислите косинус угла между векторами $\overrightarrow{B_1A}$ и $\overrightarrow{B_1C}$.

12. В вазе лежат яблоки: 10 зеленых и 5 красных. Сколькими способами можно взять из вазы 2 зеленых и 3 красных яблока?

Ответы

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{\sqrt{x}-2}$	$\sqrt[30]{a^7}$	2	x^5y^4	5/7	10

7	8	9	10	11	12
2	3/25	0,25	$6\sqrt{3}$ см, $36\sqrt{2}$ см^2	0,8	450

Вариант 4

1. Упростить

$$\frac{\frac{a+3\sqrt{a}}{a-9}}{}$$

2. Упростить

$$\sqrt[5]{x^4\cdot\sqrt[4]{x^3\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x}}}}$$

3. Вычислить

$$\frac{2\cdot 7^{22}-13\cdot 7^{21}}{49^{10}}$$

4. Упростить

$$\frac{x^{\frac{4}{3}}\cdot x^{2,5}}{x^{\frac{5}{6}}}$$

5. Вычислить $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}25\sqrt[3]{5}$

6. Вычислить $\log_{\frac{1}{36}}216$

7. Выполнить действия

$$\lg 25+\lg 40$$

8. Найти значение

$$0{,}3^{5\log_{0,09}4-\log_{0,09}9}$$

9. Вычислить $\log_{\frac{1}{5}}\log_2 32$

10. Площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью ABC_1 равна $64\sqrt{2}$ см^2. Найдите:

а) диагональ куба

б) площадь сечения куба плоскостью ACD_1.

11. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AA_1=6$, а $AB=BC=3$. Вычислите косинус угла между векторами $\overrightarrow{B_1A}$ и $\overrightarrow{B_1C}$.

12. В вазе лежат яблоки: 12 желтых и 6 красных. Сколькими способами можно взять из вазы 2 желтых и 4 красных яблока?

Ответы

1	2	3	4	5	6
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}$	$\sqrt[120]{x^{119}}$	7	x^3	2,33	-1,5

7	8	9	10	11	12
3	$10\frac{2}{3}$	-1	$8\sqrt{3}$ *см,* $32\sqrt{3}$ *см²*	*0,8*	*990*

Контрольная работа за II полугодие
по темам 7-11

Вариант 1

1. Найти пределы функций

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{3-\sqrt{x+6}}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{3x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 20x}$.

2. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{\ln(x-15)}$.

3. Найдите производную функции $y=e^{x^2-\frac{3}{4}}\cdot\arccos x$ в точке $x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\sin^2 4x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{16}$.

5. Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости графика функции $y=\dfrac{x^4}{6}-3x^2$.

6. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1\left(2x^3-1\right)^4\cdot x^2dx.$

7. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями: y=0, y=3, y=5 и $y=\sqrt{x-2}.$

8. Радиус основания цилиндра относится к его высоте как 1:2. Найдите объём цилиндра, если диагональ его осевого сечения равна $10\sqrt{2}$.

9. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды, если её боковая грань составляет с плоскостью основания угол 60°.

10. Площадь осевого сечения конуса равна 30, а площадь его основания равна 25 π. Найдите объём конуса.

Ответы

1	2	3	4
6; e^{12}; $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-2\right)$	$y=4x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$
5	$\left(-\sqrt{3};-7{,}5\right)$ и $\left(\sqrt{3};-7{,}5\right)$ координаты точек перегиба $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ и $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ промежутки выпуклости вниз $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ промежуток выпуклости вверх		

6	7	8	9	10
$\frac{1}{15}$	4π	250π	96	50π

Вариант 2

1. Найти пределы функций

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x}{4-\sqrt{x+12}}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{4x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 18x}$.

2. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{\ln(x-24)}$.

3. Найдите производную функции $y=e^{x^2-\frac{1}{2}}\cdot\arcsin x$ в точке $x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\cos^2 6x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{24}$.

5. Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости графика функции $y=\dfrac{x^4}{3}-6x^2$.

6. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1\left(3x^4+1\right)^2\cdot x^3dx.$

7. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями: y=0, x=4, x=6 и $y=\sqrt{x-3}.$

Ответы

1	2	3	4	
8; e^{12}; $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right)\left(+\sqrt{2}\right)$	$y=-6x+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$	
5	$-\sqrt{3};-15$ и $\sqrt{3};-15$ координаты точек перегиба $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ и $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ промежутки выпуклости вниз $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ промежуток выпуклости вверх			
6	**7**	**8**	**9**	**10**
$\frac{7}{4}$	4π	686π	324	48π

Экзаменационные материалы

Итоговая аттестация по учебной дисциплине ОУД.07 Математика проводится в форме письменного экзамена в формате ЕГЭ. Экзаменационная работа включает в себя 21 задание. На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут). Ответом к каждому из заданий является целое число, или конечная десятичная дробь, или последовательность цифр.

Содержание и структура экзаменационной работы дают возможность достаточно полно проверить комплекс умений и навыков по предмету:

- уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни;
- уметь выполнять вычисления и преобразования;
- уметь решать уравнения и неравенства;
- уметь выполнять действия с функциями;
- уметь выполнять действия с геометрическими фигурами;
- уметь строить и исследовать математические модели.

Для получения положительной отметки по математике необходимо набрать не менее 7 первичных баллов.

Обучающийся может с собой иметь непрограммируемый калькулятор, линейку, ручку.

Вариант 1

1. Задание 1

Найдите значение выражения $(3{,}9 - 2{,}4) \cdot 8{,}2$.

2. Задание 2

Бегун пробежал 50 м за 5 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

3. Задание 3

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

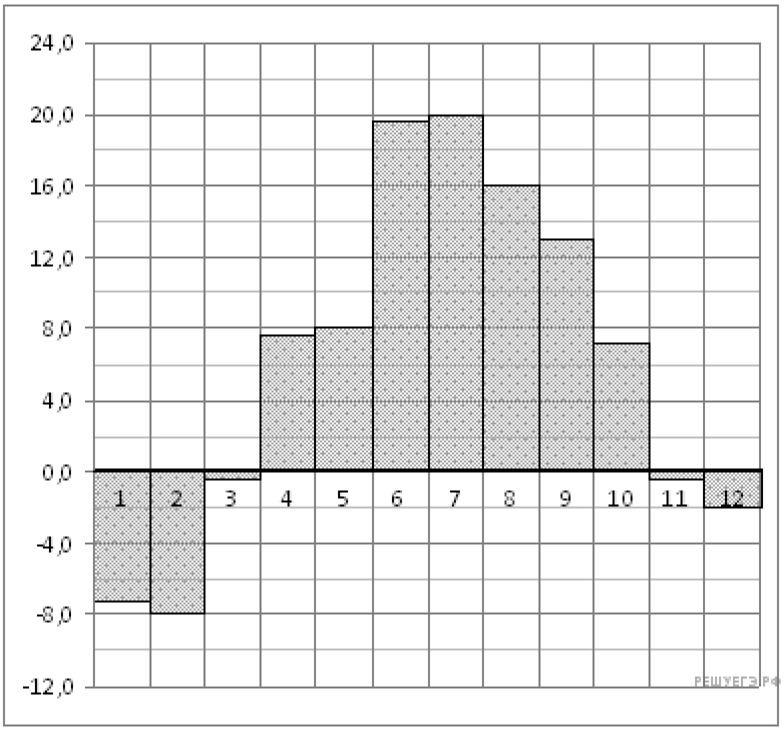
ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса куриного яйца	1) 2,5 мг
Б) масса детской коляски	2) 14 кг
В) масса взрослого бегемота	3) 50 г
Г) масса активного вещества в таблетке	4) 3 т

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

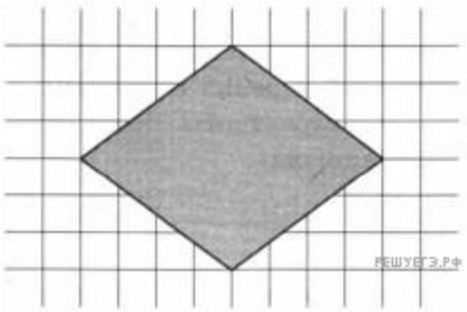
А	Б	В	Г

4. Задание 4

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру во второй половине 1999 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



5. Задание 5



План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 10 м × 10 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в м^2.

6. Задание 6

Шариковая ручка стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 900 рублей после повышения цены на 10%?

7. Задание 7

Найдите значение выражения $5\operatorname{tg} 17^\circ \cdot \operatorname{tg} 107^\circ$.

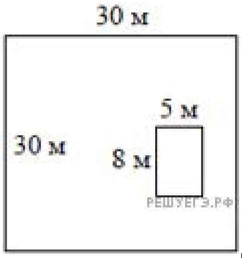
8. Задание 8

Энергия заряженного конденсатора W (в Дж) вычисляется по формуле $W = \frac{q^2}{2C}$, где C — ёмкость конденсатора (в Ф), а q — заряд на одной обкладке конденсатора (в Кл). Найдите W (в Дж), если $C = 5 \cdot 10^{-4}$ Ф и q = 0,009 Кл.

9. Задание 9

Найдите корень уравнения $2^{4-2x} = 64$.

10. Задание 10



Дачный участок имеет форму квадрата, стороны которого равны 30 м. Размеры дома, расположенного на участке и имеющего форму прямоугольника, — 8 м × 5 м. Найдите площадь оставшейся части участка. Ответ дайте в квадратных метрах.

11. Задание 11

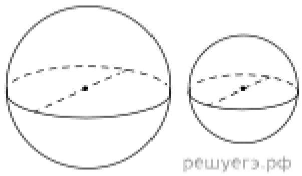
Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

12. Задание 12

Строительной фирме нужно приобрести 75 кубометров пенобетона у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	**Стоимость пенобетона (руб. за за 1 м^3)**	**Стоимость доставки**	**Дополнительные условия**
А	2650	4500 руб.	
Б	2700	5500 руб.	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2680	3500 руб.	При заказе более 80 м^3 доставка бесплатно

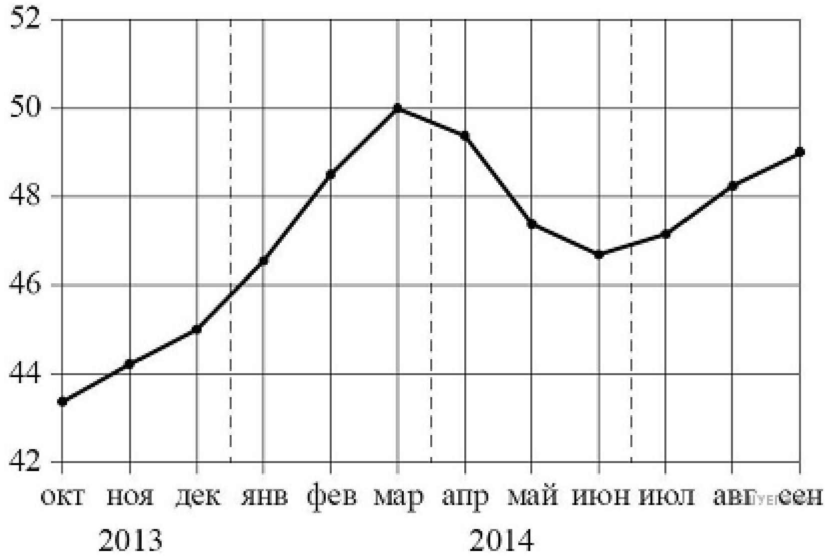
13. Задание 13



Однородный шар диаметром 3 см имеет массу 162 грамма. Чему равна масса шара, изготовленного из того же материала, с диаметром 2 см? Ответ дайте в граммах.

14. Задание 14

На рисунке точками изображён среднемесячный курс евро в период с октября 2013 года по сентябрь 2014 года. По горизонтали указываются месяц и год, по вертикали — курс евро в рублях. Для наглядности точки соединены линиями.



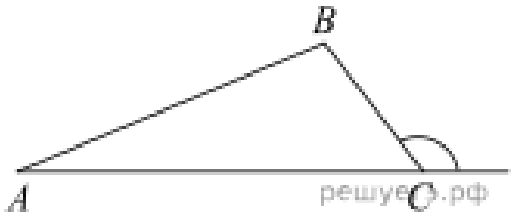
Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику курса евро.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ КУРСА ЕВРО
А) октябрь–декабрь 2013 г.	1) курс евро падал
Б) январь–март 2014 г.	2) курс евро медленно рос
В) апрель–июнь 2014 г.	3) после падения курс евро начал расти
Г) июль–сентябрь 2014 г.	4) курс евро достиг максимума

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

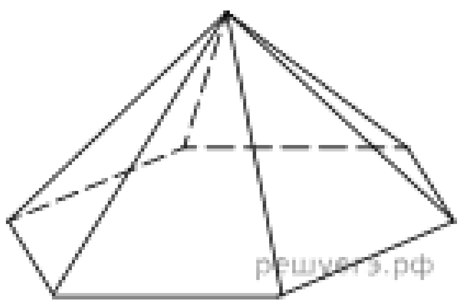
А	Б	В	Г

15. Задание 15



В треугольнике *ABC* $BC = \sqrt{7}$, $AC = 3\sqrt{7}$, внешний угол при вершине *C* равен 120°. Найдите AB.

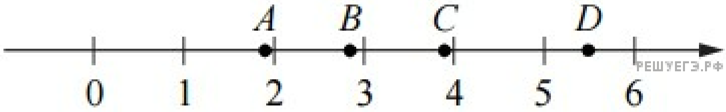
16. Задание 16



Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

17. Задание 17

На координатной прямой отмечены точки A, B, C, и D.



Каждой точке соответствует одно из чисел в правом столбце. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

А) A
Б) B
В) C
Г) D

ЧИСЛА

1) $\sqrt{7}+2\sqrt{2}$
2) $\sqrt{7}:\sqrt{2}$
3) $2\sqrt{7}-\sqrt{2}$
4) $(\sqrt{2})^3$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

18. Задание 18

В офисе фирмы компьютеры работают только от сетевого электропитания. Если компьютеры работают, то электричество в офисе есть. Выберите утверждения, которые непосредственно следуют из этих данных.

1) Если в офисе нет электричества, то компьютеры не работают.
2) Если в офисе есть электричество, то компьютеры работают.
3) Если компьютеры не работают, значит, в офисе нет электричества.
4) Если в офисе нет электричества, то не работает компьютер директора.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

19. Задание 19

Найдите пятизначное натуральное число, кратное 3, сумма цифр которого равна их произведению. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

20. Задание 20

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 98 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 7 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

21. Задание 21

Маша и Медведь съели 120 печений и банку варенья, начав и закончив одновременно. Сначала Маша ела варенье, а Медведь — печенье, но в какой-то момент они поменялись. Медведь и то и другое ест в три раза быстрее Маши. Сколько печений съел Медведь, если варенья они съели поровну?

Вариант 2
Задание 1

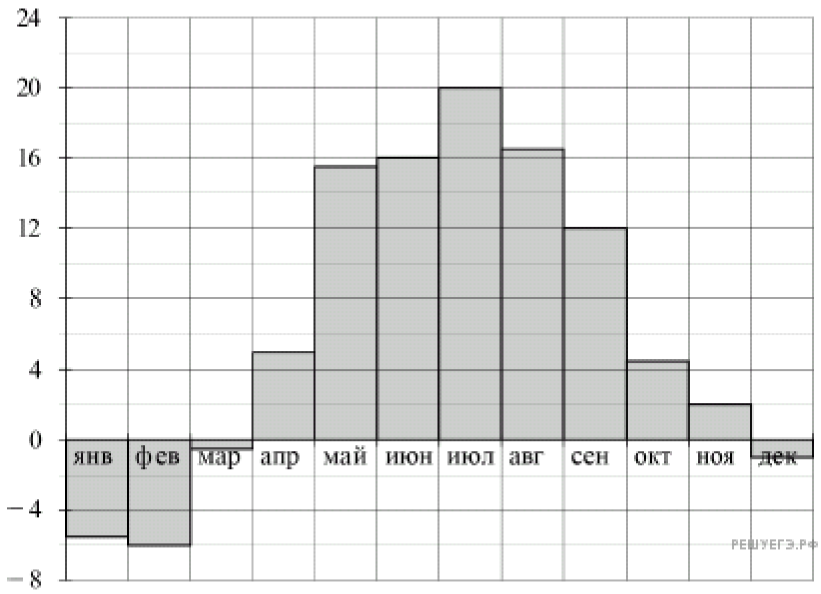
Найдите значение выражения
Задание 2
Теплоход рассчитан на 750 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 70 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?
Задание 3
Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) Объём комнаты	1) 78 200 км^3
Б) Объём воды в Каспийском море	2) 75 м^3
В) Объём ящика для овощей	3) 50 л
Г) Объём банки сметаны	4) 0,5 л

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Задание 4
На диаграмме показана средняя температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднюю температуру в Минске в период с сентября по декабрь 2003 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Задание 5

Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.
6. Задание 6 № 515825

Число дорожно-транспортных происшествий (ДТП) в летний период составило 0,85 числа ДТП в зимний период. На сколько процентов уменьшилось число дорожно-транспортных происшествий летом по сравнению с зимой?

Задание 7

Найдите значение выражения

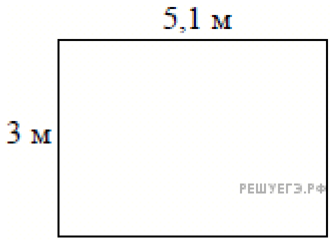
Задание 8

Скорость камня (в м/с), падающего с высоты *h* (в м), в момент удара о землю можно найти по формуле   Найдите скорость (в м/с), с которой ударится о землю камень, падающий с высоты 10 м. Считайте, что ускорение свободного падения g равно 9,8 м/с^2 .

Задание 9

Решите уравнение

Задание 10



На плане указано, что прямоугольная комната имеет площадь 15,2 кв. м. Точные измерения показали, что ширина комнаты равна 3 м, а длина 5,1 м. На сколько квадратных метров площадь комнаты отличается от значения, указанного в плане?

Задание 11

На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?

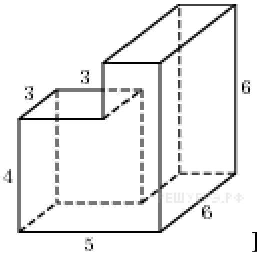
Задание 12

В таблице приведены данные о шести сумках.

Номер сумки	Длина (см)	Высота (см)	Ширина (см)	Масса (кг)
1	52	38	18	5,5
2	65	47	26	11,2
3	55	36	24	8,7
4	42	31	16	4,6
5	58	40	20	9,3
6	49	37	19	10.1

По правилам авиакомпании в ручную кладь может быть взята сумка, размеры которой не превышают 55 см в длину, 40 см в высоту, 20 см в ширину и масса которой не превышает 10 кг. Какие сумки можно взять в ручную кладь по правилам этой авиакомпании? В ответе укажите номера выбранных сумок без пробелов, запятых и других дополнительных символов. *Перечисляйте в порядке возрастания номеров.*

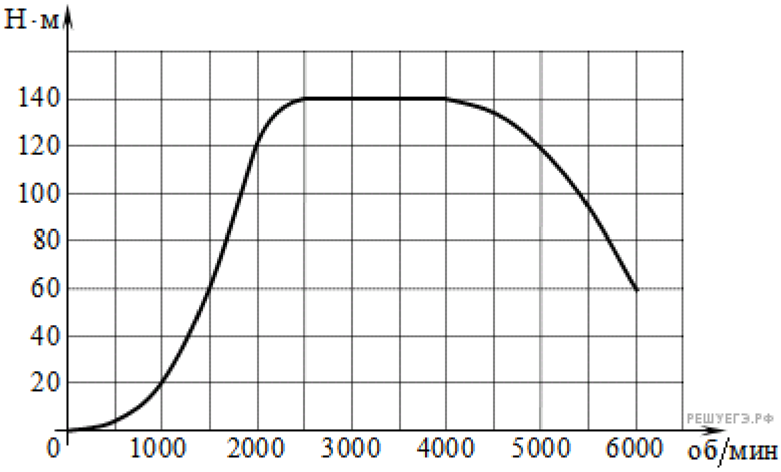
Задание 13



Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

Задание 14

На графике показана зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту. На оси ординат — крутящий момент в Н · м.



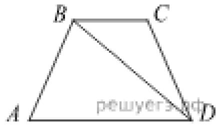
Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу количества оборотов двигателя характеристику зависимости крутящего момента двигателя на этом интервале.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА	ИНТЕРВАЛЫ ОБОРОТОВ
А) крутящий момент не менялся	1) 0 − 1500 об/мин.
Б) крутящий момент падал	2) 1500 − 2000 об/мин.
В) крутящий момент рос быстрее всего	3) 2500 − 4000 об/мин.
Г) крутящий момент не превышал 60 Н · м	4) 4000 − 6000 об/мин.

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

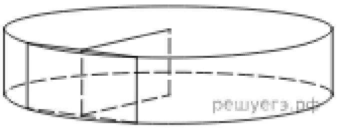
А	Б	В	Г

Задание 15



В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = CD$, $\angle BDA = 54°$ и $\angle BDC = 23°$. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

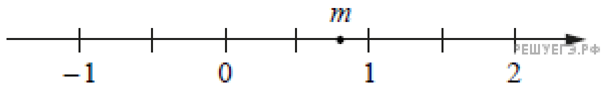
Задание 16



Радиус основания цилиндра равен 26, а его образующая равна 9. Сечение, параллельное оси цилиндра, удалено от неё на расстояние, равное 24. Найдите площадь этого сечения.

Задание 17

На прямой отмечено число m.



Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
А)	1) [−3; −2]
Б)	2) [0; 1]
В)	3) [1; 2]
Г)	4) [3; 4]

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Задание 18

Пять наиболее длинных рек России (учитывается наибольшая длина с притоками) — это Амур, Енисей, Иртыш, Лена и Обь. При этом Лена длиннее Енисея, но короче Оби, Амур длиннее и Лены и Иртыша. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

1) Амур — первая или вторая по длине река
2) Енисей — вторая или третья река по длине
3) Лена длиннее Иртыша
4) Амур длиннее Оби

В ответе укажите номер выбранного утверждения.

Задание 19

Найдите трёхзначное число, кратное 11, все цифры которого различны, а сумма квадратов цифр делится на 4, но не делится на 16. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Задание 20

Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?

Задание 21

Улитка за день заползает вверх по дереву на 4 м, а за ночь сползает на 3 м. Высота дерева 10 м. За сколько дней улитка впервые доползёт до вершины дерева?

Ответы к заданиям

№задания	Вариант 1	Вариант 2
1	12,3	12
2	36	2134
3	3241.	12
4	-2	10,5
5	2400	15

6	20	9000
7	-5	14
8	0,081	-6
9	-1	0,1
10	860	0,5
11	0,225	14
12	202500	162
13	48	3421
14	2413	49
15	7	180
16	360	4231
17	2431	1
18	14	264
19	11133	12
20	7	7
21	108	